

[文章编号] 1001-246X(2007)01-0019-10

# 求解二维三温辐射热传导方程组的一种网格自适应方法

江 军, 舒 适, 黄云清, 陈 龙

(湘潭大学数学与计算科学学院, 湖南 湘潭 411105)

[摘 要] 在求解二维三温辐射热传导方程组的过程中, 设计了一类新的基于 Hessian 矩阵的网格自适应算法. 数值实验结果表明, 与现在流行的基于一阶导数或通量的网格自适应技术相比, 该算法能够大幅改善系统的能量守恒误差, 并具有较高的整体计算效率.

[关键词] 激光约束核聚变; 二维三温辐射热传导方程; 网格自适应; Hessian 矩阵

[中图分类号] O357.53; O242.1 [文献标识码] A

## 0 引言

惯性约束聚变 (inertial confinement fusion, ICF) 是实现热核聚变的一条重要途径. 在一类激光聚变的数值模拟研究中, 一个核心的工作是求解由质量守恒、动量守恒和三温 (电子温度、离子温度和光子温度) 能量守恒 3 个方程组成的三温辐射流体力学方程组. 在该方程组的实际数值计算中, 求解三温能量 (守恒) 方程所耗用的机时占整个系统计算机的 80% 以上, 可见求解能量方程是一个重要的环节<sup>[1-3]</sup>. 为了便于对三温能量方程组的研究, 假设介质静止不动, 去掉压力做功项, 简化热传导系数和能量交换系数, 保留其占主导地位的非线性项, 得到三温能量方程的一种简化模型方程——三温辐射热传导方程

$$\begin{cases} c_e \frac{\partial T_e}{\partial t} - \frac{1}{c_e} (K_e - T_e) = -c_{ei} (T_i - T_e) + c_{er} (T_r - T_e), \\ c_i \frac{\partial T_i}{\partial t} - \frac{1}{c_i} (K_i - T_i) = c_{ei} (T_e - T_i), \\ \frac{4}{c_r} T_r^3 \frac{\partial T_r}{\partial t} - \frac{1}{c_r} (K_r - T_r) = c_{er} (T_e - T_r), \end{cases} \quad (1)$$

其中  $T_e, T_i, T_r$  分别表示电子、离子、光子的温度;  $c$  为介质密度, 在内部为常数, 在介质区界面处间断;  $K_e, K_i, K_r$  为电子、离子和光子的热传导系数,  $K = A T^{5/2}$  ( $= e, i$ ),  $K_r = A_r T_r^{3+}$ ;  $c_{ei}, c_{er}$  是电子、离子和光子的能量交换系数,  $c_{ei} = A_{ei} T_e^{-2/3}$ ,  $c_{er} = A_{er} T_e^{-1/2}$ ;  $c, A$  ( $= e, i, r$ ),  $A_{ei}, A_{er}$  都是依赖于介质材料的常数, 在介质区内连续, 在介质区界面处间断. 该模型方程近似地描述了 ICF 内爆动力学过程中辐射能量在静止介质中的非线性传播过程, 体现了原始问题的主要特性和求解的难度.

由于实际的二维三温能量方程组具有许多特性, 如系数的多尺度性、强非线性、温度的梯度不连续、存在突变区等. 为了提高计算效率, 网格自适应技术是不可缺少的. 目前, 常用的网格自适应算法大致可以分为 3 种: 即  $h$ -类型,  $r$ -类型和  $p$ -类型的网格自适应.  $h$ -类型的自适应网格主要通过网格的局部加密和粗化来得以实现, 因为函数未知, 实际计算中常用后验误差作为单元是否需要加密或粗化的判断标准.  $r$ -类型的网格自适应是在保持原有网格拓扑结构不变的情况下移动网格节点, 通过极小化一个能量泛函, 将网格整体移动到误差较大区域<sup>[4,5]</sup>.  $p$ -类型的网格自适应是在误差较大区域通过增加有限元空间的次数来提高逼近的精度<sup>[6,7]</sup>. 本文讨论  $h$ -类型的网格自适应算法.

利用解的梯度大小或数值通量来进行网格局部加密是工程界常用的一种网格自适应技术. 文[8]在 UG

[收稿日期] 2005-08-30; [修回日期] 2005-11-28

[基金项目] 国家自然科学基金与中国工程物理研究院联合基金 (10376031) 及国家重点基础研究发展计划 (2005CB321701, 2005CB321702) 资助项目

[作者简介] 江军 (1970-), 男, 湖南桃源, 博士生, 主要从事偏微分方程数值解及网格自适应研究.



软件框架上,实现了一种基于能量变化的网格自适应.本文利用最近发展起来的一种基于 Hessian 矩阵的网格自适应理论,针对方程组(1),设计了一种新的网格自适应算法.数值实验表明,该算法能够有效降低系统的能量守恒误差.

## 1 网格自适应

### 1.1 理论基础

基于 Hessian 矩阵的网格自适应是最近几年快速发展的一种网格优化技术,文[9]从插值误差出发,证明了最优网格与函数 Hessian 矩阵的关系,其主要理论如下:

设  $\Omega$  是  $R^n$  的一个开区域,对给定的一个函数  $u \in C^2(\Omega)$ ,定义  $u$  的 H-矩阵为一个满足下列性质的对称正定矩阵,

$$| \nabla^T (\Delta u)(x) | \leq c_0 \nabla^T H(x), \quad R^n, x \in R, \quad (2)$$

其中  $c_0$  是某个正常数.

由 H-矩阵的定义知其实际上是  $u$  的 Hessian 矩阵  $(\Delta u)(x)$  的正定化矩阵.利用 H-矩阵定义黎曼度量

$$H_p = (\det H)^{-\frac{1}{2p+n}} H, \quad p \geq 1. \quad (3)$$

记  $T_N$  是  $R^n$  中的单纯形网格剖分,其中  $N$  是网格的单元数.设  $T_N$  满足以下两个假设:

存在两个正常数  $\theta_0$  和  $\theta_1$  使得对任意单元  $T$ ,

$$\theta_0 \nabla^T H \leq \nabla^T H(x) \leq \theta_1 \nabla^T H, \quad R^n, \quad (4)$$

其中  $H$  是  $H$  在  $T$  上的积分平均.

存在两个正常数  $\theta_0$  和  $\theta_1$  使得

$$\frac{\tilde{d}_{i,T}}{|T|^{2/n}} \leq \theta_0, \quad \forall T \in T_N; \quad \frac{\max_T |T|}{\min_T |T|} \leq \theta_1, \quad (5)$$

其中  $|T|$  是  $T$  在新度量  $H_p$  下的体积,而  $\tilde{d}_{i,T}$  是  $T$  的第  $i$  条边在该新度量下的长度.

在上述关于单纯形网格的假设条件下,有如下定理成立<sup>[9]</sup>.

**定理 1** 设  $u \in C^2(\Omega)$ , 网格  $T_N$  满足假设条件  $\theta_0$  和  $\theta_1$ ,  $u_T$  是  $T_N$  下关于  $u$  的线性有限元插值函数,则有误差估计式

$$|u - u_T|_{L^p(\Omega)} \leq C N^{-2/n} \sqrt[n]{\det(H)} \Big|_{L^{2p+n}(\Omega)},$$

其中常数  $C = C(n, p, c_0, \theta_0, \theta_1, \theta_0, \theta_1)$ .

该误差估计式对严格凸(或凹)函数是最优的,即反估计也成立.

在算法实现时,如何从方程的数值解中获取 Hessian 矩阵  $(\Delta u)(x)$  是一个比较困难的问题.特别是对于线性元,因为其二阶导数为零,所以必须经过特殊的处理才能得到合理的 Hessian 逼近.下面,给出线性元求 Hessian 矩阵的常用方法.

首先,从网格节点上的数值解出发,利用某种数值梯度技术,计算节点处的梯度值;然后将数值梯度  $(\nabla u)$  的分量依次替换原来方程的解  $(u)$ ,再用相同的数值梯度技术即可得到节点上的二阶导数,从而得到矩阵

$$(\Delta u)(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

其中利用数值解求数值梯度的方法被称为 recover 技术.目前最常用的数值梯度技术是基于 patch 的 Zienkiewicz-Zhu recover 技术<sup>[10,11]</sup>,其基本思想是利用局部的最小二乘逼近获得节点处的导数值. Bank 和 Xu<sup>[12]</sup>利用多重网格方法中的光滑技术和  $L^2$  投影算子发展了一种新的 recover 技术,其高效性已被证明,最近, Carstensen 和 Bartels<sup>[13]</sup>的结果表明,一般网格上的所有平均技术都能获得梯度的有效逼近.

本文在计算网格节点上的数值梯度时,采用了一种体分比平均公式,即

$$(u_N)(x_i) = \frac{|(u_N)|}{|i|}, \quad (7)$$

可以证明,该公式实际上是一种基于局部  $L^2$  投影的 recover 技术.

## 1.2 网格自适应算法

从以上的理论出发,设计了适用于求解方程(1)的网格自适应算法.

设已知求解域的初始三角形网格  $T_0$  和第  $k$  次自适应后的网格  $T_h^k (k=0,1,2,\dots, T_h^0 = T_0)$ , 求网格  $T_h^{k+1}$  的算法如下.

算法 1:

step 1: 将  $T_h^k$  上的数值解限制到  $T_0$  网格;

step 2: 计算  $T_0$  网络上每个节点的度量矩阵  $S$ ;

step 3: 计算  $T_0$  网格在新度量下的平均边长  $\bar{d}$ ;

step 4: 将  $T_0$  网格中新度量长度大于  $\bar{d}$  的边做上加密标志, 其中  $\gamma$  为经验系数, 用于控制加密的规模;

step 5: 将  $T_0$  网格中有加密标志的边进行加密, 得到  $T_h^{k+1}$  网格, 并从  $T_0$  网格插值得到  $T_h^{k+1}$  网格的解.

算法 1 中, 利用节点的度量矩阵计算新度量下边长的方法如下:

设  $AB$  为网格中的任意一条边, 边的端点为  $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ , 各自对应的度量矩阵分别为  $S(A)$  和  $S(B)$ .

令  $\bar{S} = \frac{S(A) + S(B)}{2}$ ,  $X = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)^T$ ,  $AB$  在新度量下的长度

$$|AB|_S = \sqrt{X^T \bar{S} X}. \quad (8)$$

计算网格在新度量下的平均边长的方法如下:

设  $T_N$  为  $N$  个单元三角形网格,  $\tilde{d}_{,i}$  为任意三角形单元的一条边在新度量下的长度. 网格在新度量下的平均边长

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^3 \tilde{d}_{,i}}{3N}. \quad (9)$$

从算法 1 出发, 针对方程(1), 给出如下 3 种不同的度量矩阵  $S$  的取法, 从而得到 3 种不同的自适应方法.

基于光子梯度的自适应方法(简记为 Grad 自适应), 其中度量矩阵  $S$  的表达式为

$$S = \begin{pmatrix} \left| \frac{\partial T_r}{\partial x} \right| & 0 \\ 0 & \left| \frac{\partial T_r}{\partial y} \right| \end{pmatrix}. \quad (10)$$

基于 Hessian 矩阵的网格自适应技术(简记为 Hess 自适应), 其中度量矩阵为

$$S = H_p. \quad (11)$$

基于光子通量的自适应方法(简记为 KGrad 自适应), 其中度量矩阵  $S$  的表达式为

$$S = \begin{pmatrix} \left| K_r \frac{\partial T_r}{\partial x} \right| & 0 \\ 0 & \left| K_r \frac{\partial T_r}{\partial y} \right| \end{pmatrix}. \quad (12)$$

## 2 数值实验

我们通过数值实验来比较 3 种网格自适应方法在求解方程(1)时的效果. 设方程的求解区域为  $\{(x, y, t) | (x, y) \in \Omega, 0 \leq t \leq 100\}$ , 这里  $\Omega = \bigcup_{i=1}^3 \Omega_i$  (图 1), 是由 3 个不同介质区域组成的一个连通但互

不重叠的计算区域,  $\Omega_1$  为半径等于 90 的半圆,  $\Omega_2$  圆环的内外圆半径分别为 90, 95,  $\Omega_3$  圆环的内外圆半径分别为 95, 132, 圆心为直角坐标系的原点.

边值条件:

固壁上的轴对称条件  $K \cdot T \cdot n|_{\Gamma_2} = 0, \quad = (e, i,$

$r), n$  为单位外法方向;

自由面边界条件

$$K \cdot T \cdot n|_{\Gamma_1} = 0, \quad = e, i,$$

$$T_r = T_r(x, y, t)|_{\Gamma_1} = 2.0;$$

初值条件:

$$T(x, y, 0) = T^0(x, y) = 3.0 \times 10^{-4}, \quad = e, i, r.$$

下面是实验中使用的各种常数值.

$$= \begin{cases} 0.09, & \text{in } \Omega_1, \\ 2.5, & \text{in } \Omega_2, \\ 1.1, & \text{in } \Omega_3, \end{cases} \quad c = \begin{cases} c_e = 1.5, & e, \\ c_i = 1.5, & i, \\ c_r = 1.0, & r, \end{cases} \quad e = \begin{cases} 35, & \text{in } \Omega_1, \\ 40, & \text{in } \Omega_2, \\ 45, & \text{in } \Omega_3, \end{cases} \quad i = \begin{cases} 35, & \text{in } \Omega_1, \\ 40, & \text{in } \Omega_2, \\ 70, & \text{in } \Omega_3, \end{cases} \quad r = 0.007568,$$

$$= \begin{cases} 1.0, & \text{in } \Omega_1, \\ 2.4, & \text{in } \Omega_2, \\ 3.0, & \text{in } \Omega_3, \end{cases} \quad A_e = \begin{cases} 200, \\ 60, \\ 81 \end{cases} \quad A_i = \begin{cases} 5, \\ 0.00017, \\ 0.02, \end{cases} \quad A_r = \begin{cases} 1.8 \times 10^7 / \text{m}^2, \\ 9.0 \times 10^2 / \text{m}^{1.5}, \\ 2.1 \times 10^3 / \text{m}^2, \end{cases}$$

$$A_{ei} = \begin{cases} 2000, \\ 4000, \\ 7000, \end{cases} \quad A_{er} = \begin{cases} 10, & \text{in } \Omega_1, \\ 140, & \text{in } \Omega_2, \\ 79, & \text{in } \Omega_3. \end{cases}$$

首先,按照等质量的原则在求解区域上建立了一个单元数为 2 356 的三角形网格,记为 mesh0;将 mesh0 一致加密,即将所有的单元都一分为 4,得到一个 9 424 单元的网格,该网格标记 mesh1,网格的形状见图 2.

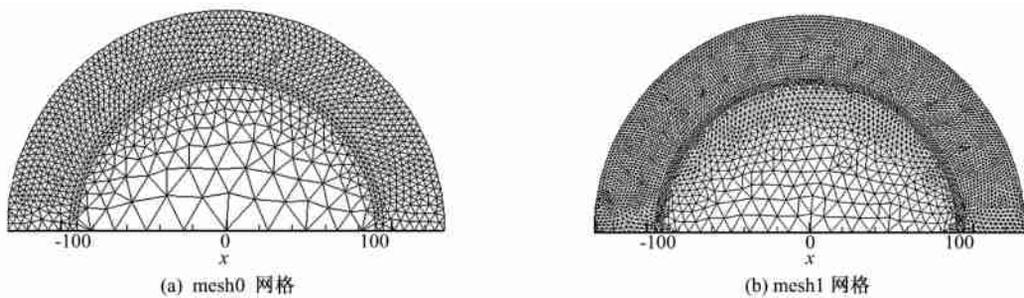


图 2 mesh0 及 mesh1 网格图

Fig. 2 mesh0 and mesh1

求解方程(1)时,时间离散采用向后欧拉方法,空间离散采用一种保对称的有限体方法<sup>[14]</sup>,线性求解器选用的是以 AMG 做预条件子的 CG 方法,每个非线性迭代步要求非线性残差的  $l_2$  范数下降 5 个量级,每个线性迭代步要求线性残差的  $l_2$  范数下降 6 个量级,时间自适应方法与文[8]相同.

在二维三温辐射热传导方程的计算中,能量守恒误差是衡量计算效果的一个重要指标. 设  $E_{flux}$  表示总辐射能量,  $E_{own}$  表示总内能,  $E_0$  表示初始内能,本文所使用的能量误差  $Err$  的计算公式为

$$Err = \frac{|E_{flux} - (E_{own} - E_0)|}{|E_{flux}|} \quad (13)$$

算法 1 中,设  $u^0, u^k, u^{k+1}$  ( $= e, i, r$ ) 为网格  $T_0, T_h^k$  和  $T_h^{k+1}$  上 3 种介质的数值解,由网格的嵌套性有  $T_0 \subset T_h^k$ . 使用如下方法来实现不同网格间节点的插值.

1) 将  $T_h^k$  上的数值解限制到  $T_0$ ,

$$u^0(x) = u^k(x), \quad \forall x \in T_0. \quad (14)$$

2) 从  $T_0$  网格插值得到  $T_h^{k+1}$  网格.

考虑到原三温辐射流体力学方程组中状态方程组

$$\begin{cases} e = c_e T_e, \\ i = c_i T_i, \\ r = \frac{c_r}{4} T_r^4, \end{cases}$$

不妨设对任意的节点  $x \in T_h^{k+1}$ , 存在 2 个父节点  $x_1, x_2 \in T_0$ , 则有

$$\begin{cases} u_r^0(x_1) = \frac{c_r}{4} (u_r^0(x_1))^4, & u_r^0(x_2) = \frac{c_r}{4} (u_r^0(x_2))^4, & u_r^{k+1}(x) = \frac{u_r^0(x_1) + u_r^0(x_2)}{2}, \\ u_e^{k+1}(x) = \frac{u_e^0(x_1) + u_e^0(x_2)}{2}, \\ u_i^{k+1}(x) = \frac{u_i^0(x_1) + u_i^0(x_2)}{2}, \\ u_r^{k+1}(x) = \sqrt[4]{\frac{u_r^{k+1}(x)}{c_r}}. \end{cases} \quad (15)$$

另外, 考虑到初边值条件的突变性, 在算法 1 中增加了对外边界单元的处理, 从而得到如下改进算法.

算法 2

step1: 将  $T_h^k$  上的数值解限制在  $T_0$  网格;

step2: 计算  $T_0$  网格上每个节点的度量矩阵  $S$ ;

step3: 计算  $T_0$  网格在新度量下的平均边长  $\bar{d}$ ;

step4: 将  $T_0$  网格中新度量长度大于  $\bar{d}$  的边做上加密标志, 其中  $\alpha$  为经验系数 (实验中取值为 1.3), 用于控制加密的规模;

step5: 若任意的三角形单元  $T_0$ , 且 有两个顶点落在边界  $\Gamma_1$  上, 则给单元  $T_0$  的三边做上加密标志.

step6: 将  $T_0$  网格中有加密标志的边进行加密, 得到  $T_h^{k+1}$  网格, 并从  $T_0$  网格插值得到  $T_h^{k+1}$  网格的解.

## 2.1 实验方案

为了比较 3 种自适应方法的实际效果, 在算法 2 的基础上, 设计了如下几组数值实验.

实验 1: 在固定网格 mesh0 上进行计算.

实验 2: 在固定网格 mesh1 上进行计算.

实验 3: 以 mesh0 为  $T_0$  网格, 采用 Hess 网格自适应.

实验 4: 以 mesh0 为  $T_0$  网格, 采用 Grad 网格自适应.

实验 5: 以 mesh0 为  $T_0$  网格, 采用 KGrad 网格自适应.

考虑到方程 (1) 的特殊性, 网格变化幅度不宜过大, 因此, 在自适应过程中对网格的规模进行了控制, 实验 3、实验 4 和实验 5 的网格单元数在整个计算过程中都没有超过 3 600.

图 3 记录了实验 3 在  $t = 3.08$  和  $t = 11.85$  时刻的光子温度等值线, 其中等值线密集的区域为光子的突变区. 图 3 中的等值线呈现出球对称性, 这种现象与模型问题的球对称特性是相适应的. 在实验中, 我们也观察到实验 4、实验 5 与实验 3 具有一致的光子温度等值线.

为了比较不同自适应方法下的网格变化情况, 截取了实验 3、实验 4 和实验 5 两个时刻的网格图, 其结果见图 4、图 5、图 6. 从这些图形可以看出:

1) 实验 3 中, 加密产生的新网格落在等值线密集区域的两边. 在图 4(a) 中, 可以观察到等值线密集区域前的网格被加密; 在图 4(b) 中, 等值线密集在  $\Omega_2$  区域, 被加密的却是介质交界面附近的  $\Omega_1$  和  $\Omega_3$  中的单元. 这说明, 利用 Hess 网格自适应技术, 被加密区域是梯度变化大的区域, 而不完全是梯度值大的区域, 从图像来看, 加密区域落在了突变区域与正常区域的衔接地带.

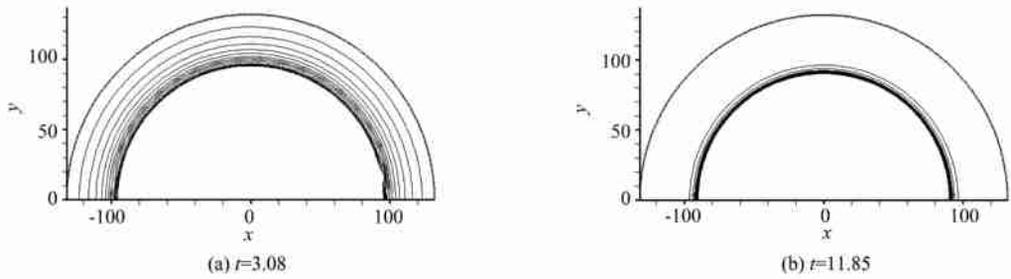


图 3 实验 3 的光子温度等值线图

Fig. 3 Photon temperature contour in Exp. 3

- 2) 实验 4 中, 梯度值大的区域得到了加密. 图 5 表现了网格的加密区域与等值线密集区域的一致性.
- 3) 实验 5 中, 网格加密区域没有像实验 3 和实验 4 一样跟随温度突变区的移动而漂移.

从以上的特征可以看出, Hess 和 Grad 两种网格自适应技术以各自的方式完成了对光子温度突变区的追踪. 而 KGrad 网格自适应技术没有体现出这样的功能.

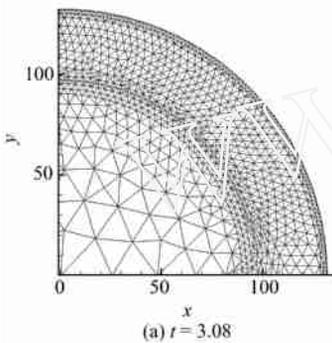


图 4 实验 3 中的网格

Fig. 4 Grid in Exp. 3

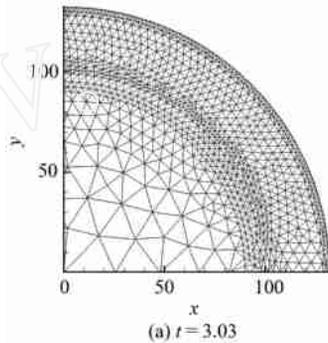


图 5 实验 4 中的网格

Fig. 5 Grid in Exp. 4

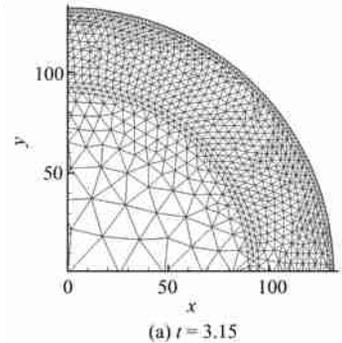
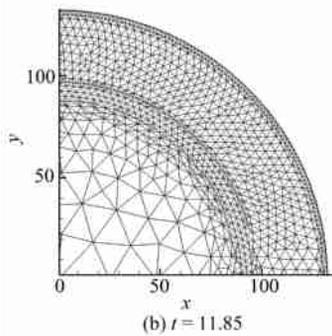
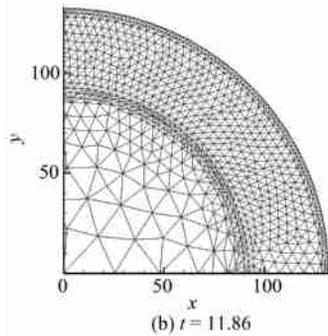


图 6 实验 5 中的网格

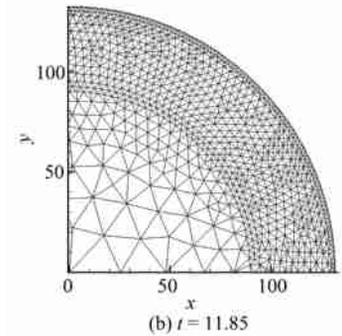
Fig. 6 Grid in Exp. 5



(b)  $t = 11.85$



(b)  $t = 11.86$



(b)  $t = 11.85$

表 1 为实验 1 ~ 实验 5 在 1.0, 5.0, 10.0, 20.0, 100.0 物理时刻的即时能量误差(百分比).

从表 1 可以发现如下现象:

1) 实验 2 的能量误差比实验 1 下降了 52%. 实验 2 的网格是由实验 1 的网格一致加密得到, 能量误差的下降说明一致加密的方法能够改善能量守恒误差, 其改善的幅度也受限于整个方程求解方法的一阶特性.

2) 实验 3 的能量误差比实验 1 降低了 63%, 相对于实验 2 也降低了 24%.

3) 实验 4 的能量误差比实验 1 降低了 27%, 但相对于实验 2 升高了 52%.

表 1 能量守恒误差

Table 1 Energy conservation errors

物理时刻	实验 1/%	实验 2/%	实验 3/%	实验 4/%	实验 5/%
1.0	8.69	4.16	3.19	4.87	4.12
5.0	6.50	3.14	2.52	3.96	3.19
10.0	5.68	2.74	1.72	3.38	2.78
20.0	5.16	2.48	1.56	3.41	2.52
100.0	4.32	2.08	1.59	3.16	2.10

4) 实验 5 的能量误差与实验 2 的能量误差基本一致.

为了进一步比较各个实验的能量误差,图 7 给出了这些实验在整个仿真过程中能量误差的连续变化曲线.这些变化曲线表明:

1) 前面所指出的各个实验之间能量误差的相对关系在图 7 中得到了进一步验证.从图 7 可清楚地看到,实验 4 的能量误差介于实验 1 和实验 2 之中,即使用 Grad 网格自适应技术后的能量误差要优于初始网格,但比一致加密后的网格差,这种现象与我们对网格自适应的一般认识是相符的.而实验 3 的能量误差要优于实验 2,这就体现了 Hess 网格自适应技术在降低系统能量守恒误差上的优势.

2) 实验 3 与实验 4 的能量误差并不是一个单调下降的过程,其中两次能量误差增大的时刻,与辐射能量两次穿越介质边界的时刻比较吻合.

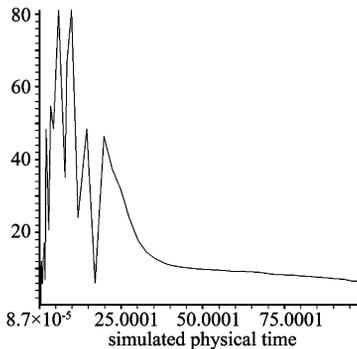
3) 实验 2 与实验 5 的能量误差曲线非常接近,而且二者都保持了随时间单调递减的趋势.

表 2 记录了实验 1 ~ 实验 5 计算到物理时刻 100 时所耗用的 CPU 时间.实验中所使用的计算平台为 Intel 2.4GHz,1.0G 内存的 PC.

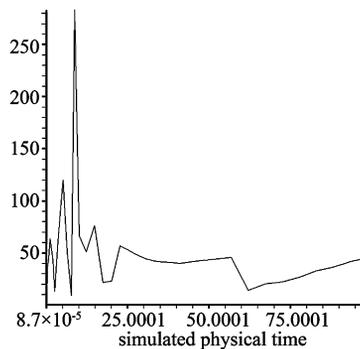
结合表 2 以及前面的能量误差比较可以看出,基于 Hessian 矩阵的网格自适应方法相对于基于梯度和通量的网格自适应方法,在能量误差和计算效率两个方面都拥有优势.

对于实验 3 和实验 4 在图 7 中所呈现的能量误差非单调下降的现象,我们认为在网格自适应过程中的插值误差是导致该现象的一个重要原因.为此,记录了两个实验中每次网格自适应时,  $T_h^{k+1}$  的能量误差相对于  $T_h^k$  能量误差的变化.结果如图 8 所示,其中,图的纵坐标表示的是  $T_h^{k+1}$  相对于  $T_h^k$  的能量误差放大倍数,横坐标为时间.由于这种能量误差的放大完全是由于网格的插值误差所导致,所以图 8 就间接显示了插值误差对两种网格自适应技术的影响.

从图 8 看出,在两种网格自适应技术中,网格自适应后的能量误差都被放大,而且这种放大效果在 Grad 网格自适应中表现得更为明显.



(a) 实验3自适应中的能量误差放大倍数  
(a) Zoom of energy conservation error in Exp.3



(b) 实验4自适应中的能量误差放大倍数  
(b) Zoom of Energy conservation error in Exp.4

图 8 实验 3 及实验 4 中自适应中的能量误差放大倍数

Fig. 8 Zoom of energy conservation error in Exp. 4 and Exp. 3

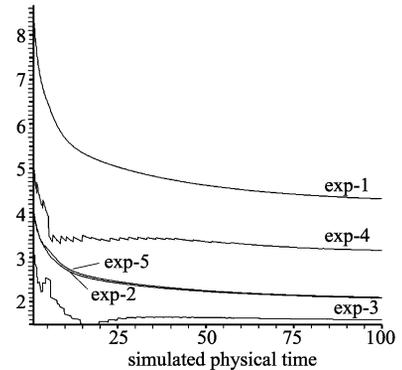


图 7 实验 1,2,3,4,5 的能量误差变化曲线  
Fig. 7 Energy conservation errors in experiments

表 2 CPU 时间

Table 2 CPU times in experiments

实验 1/s	实验 2/s	实验 3/s	实验 4/s	实验 5/s
6 662.44	59 364.56	12 338.06	17 112.53	13 145.34

## 2.2 实验方案

为了进一步验证插值误差对能量误差的影响,对算法 2 中 step6 的插值做了一些约束,即,若节点  $p$

$T_h^{k+1}$  且  $p \in T_h^k$ , 则  $u(p)|_{T_h^{k+1}} = u(p)|_{T_h^k}$ , 节点  $p$  无需插值. 这样就减少了插值的次数, 从而也减少了插值误差的影响. 在对算法 2 做以上处理的前提下, 以  $\text{mesh}_0$  为  $T_0$  网格, 进行了实验 6 和实验 7, 其中实验 6 采用 Hess 网格自适应, 实验 7 采用 Grad 网格自适应.

表 3 记录了实验 6、实验 7 在 5 个物理时刻的即时能量误差 (百分比) 和计算到第 100 物理时刻所耗用的 CPU 时间. 图 9 显示了实验 2, 3, 4, 6, 7 的能量误差连续变化曲线.

从图 9 和表 3 可以看出以下几个现象:

1) 实验 6、实验 7 的能量误差曲线基本保持了单调递减的趋势, 且比较光滑;

2) 实验 6 相对于实验 3 能量误差增大了 14%, CPU 时间也增大了 27%;

3) 在稳态时, 实验 7 的能量误差比实验 4 降低了 25%, CPU 时间减少了 8%.

这些现象表明, 在网格自适应的过程中, 插值误差对系统的能量守恒误差有较大的影响, 它导致了网格自适应中能量误差的非单调递减和振荡现象. 但是, 同样也看到, 在 Hess 网格自适应过程中, 减少插值次数, 降低插值误差影响后, 整个仿真过程的能量守恒误差却有较大幅度的上升. 如何在保持能量误差单调下降的前提下又获得较好的能量误差, 需要做更进一步的研究.

### 2.3 实验方案

在计算模型中,  $\Gamma$  边界上的光子温度从  $3.0 \times 10^{-4}$  瞬间变化为 2.0, 为了研究突变的初边值条件对网格自适应的影响, 设计如下的实验方案:

首先将  $\text{mesh}_0$  的  $\Gamma$  边界上的单元加密, 得到一个单元数为 2 854 的网格, 并以它为  $T_0$  网格, 分别做了实验 8 和实验 9, 其中, 实验 8 采用的是 Hess 网格自适应, 而实验 9 则采用 Grad 网格自适应. 在实际计算过程中, 两个实验中的网格单元数均没有超过 4 750.

图 10 集中显示了实验 2, 3, 4, 8, 9 在整个仿真过程中的能量误差的变化曲线, 而表 4 记录了实验 8 和实验 9 在 5 个特定时刻的即时能量误差及仿真计算所耗用的 CPU 时间.

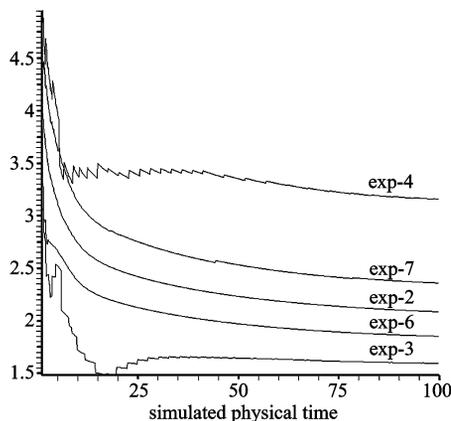


图 9 实验 2, 3, 4, 6, 7 的能量误差连续变化曲线图

Fig. 9 Energy conservation errors in Exps. 2, 3, 4, 6, 7

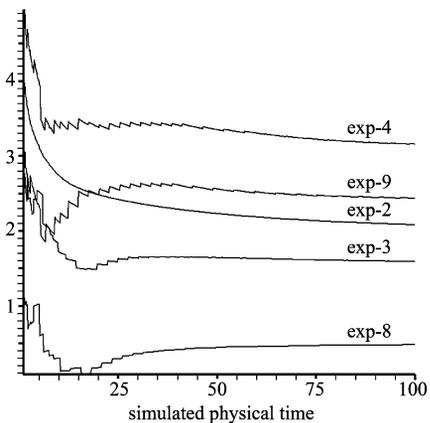


图 10 实验 2, 3, 4, 8, 9 的能量误差对比

Fig. 10 Energy conservation errors in Exps. 2, 3, 4, 8, 9

从表 4 和图 10 可以看到:

1) 实验 8 的网格单元数比实验 2 少 (大约为实验 2 网格单元数的一半), 但是能量误差相对于实验 2 却下降了 77%, 相对于实验 1 更是下降了 89%. 在实验 8 的整个仿真过程中, 能量误差都被控制在

表 3 实验 6 和实验 7 的能量误差和 CPU 时间

Table 3 Energy conservation errors and CPU time in Exp. 6 and Exp. 7

实验名称	误差 / %					CPU 时间/s
	$t=1.0$	$t=5.0$	$t=10.0$	$t=20.0$	$t=100.0$	
实验 6	3.39	2.67	2.38	2.17	1.85	15 701.95
实验 7	4.70	3.61	3.13	2.82	2.36	15 801.15

表 4 实验 8 与实验 9 的能量误差和 CPU 时间

Table 4 Energy conservation errors and CPU time in Exps. 8, 9

实验名称	误差 / %					CPU 时间/s
	$t=1.0$	$t=5.0$	$t=10.0$	$t=20.0$	$t=100.0$	
实验 8	1.24	1.02	0.30	0.18	0.48	19 666.64
实验 9	2.61	2.33	2.12	2.48	2.43	45 436.13

1.3% 以下,在稳态时,能量误差为 0.48%,效果较好.

2) 实验 9 能量误差比实验 4 降低了 23%,但是总体能量误差效果依然比实验 2 差.

实验 8 相对于实验 3,只是加大了初始网格在边界的单元密度,但是能量误差却有较大幅度的降低,这就说明在自适应算法中,充分考虑突变的初边值条件,适当加大边界的网格密度就可以获得更优的能量守恒误差.另外,这两个实验也进一步表明,Grad 网格自适应方法在改善系统能量守恒性和计算效率方面仍然不如 Hess 网格自适应方法.

### 3 结论

根据数值实验的结果,可得到如下初步结论:

1) 本文提供的基于 Hessian 矩阵的网格自适应算法,在求解二维三温辐射热传导方程的过程中,能够较准确地追踪光子温度突变区域,并能够显著降低能量守恒误差.在整个系统的仿真计算中,这是一种值得尝试的空间自适应方法.

2) 本文提供的基于光子梯度的网格自适应算法,能够有效追踪系统的温度突变区,并在一定程度上改善系统的能量守恒误差,但是就能量守恒误差和计算效率而言,其网格自适应效果与 Hess 网格自适应方法有一定的差距.我们认为,如果在这种网格自适应的算法中,适当扩大网格的加密区域,应该能够进一步改善系统的能量误差.针对这一想法,在相关的数值实验中,将梯度所判定的加密区域向外延拓一圈,实验结果显示,整个计算过程的能量误差有所降低,但是在稳定状态,能量守恒性仍然比实验 2 差.

3) 在实验 5 中所使用的基于光子通量的网格自适应方法,虽然在降低能量误差方面不如基于 Hessian 矩阵的网格自适应方法,也不能反应温度突变区的变化,但是该方法能够保持能量守恒的单调下降,且守恒误差也接近一致加密的效果,所以在一般情况下,该网格自适应方法也不失其可取性.

4) 插值误差对网格自适应有较大的影响,并直接导致网格自适应中能量误差的震荡现象.

5) 针对方程 (1),在网格的自适应算法中,充分考虑突变的初边值条件,适当加密自由面边界的单元,使边界与区域内部保持一定的网格密度比,有助于降低系统的能量守恒误差.我们在制作网格自适应软件时,考虑了这方面的影响.

另外需要说明的是,由于我们的自适应算法只使用了两层网格,当系统突变区过于狭窄的时候,本方法会遇到一定的困难.如何克服这一缺陷,进一步提高网格自适应算法的效率,是我们今后研究的方向.

致谢:在此感谢许进超教授和莫则尧研究员,他们对本文提供了有益的建议;另外也感谢本文的审稿老师,其详细而中肯的建议对本文的完善提供了极大的帮助.

### [参 考 文 献]

- [ 1 ] Fu Shangwu, Shen Longjun, Huang Shuke. 2D numerical simulation method and code for laser driven implosion[J]. High Technology Letters. 1998, 5:51 - 54.
- [ 2 ] Fu Shangwu, Fu Hanqing, Shen Longjun, Huang Shuke, Chen Guangnan. A nine point difference scheme and iteration solving method for two dimensional energy equations with three temperature[J]. Chinese J Comput Phys, 1998 15(4):489 - 497.
- [ 3 ] Fu Shangwu, Huang Shuke, Li Yunsheng. Numerical simulation of indirectly driven high convergence implosions[J]. Chinese J Comput Phys, 1999, 16(2):162 - 166.
- [ 4 ] Gottlieb J J, Hawken D F, Hansen J S. Review of some adaptive node movement techniques in finite-element and finite-difference solutions of partial differential equations[J]. J Comp Phys, 1991 95(2):254 - 302.
- [ 5 ] Huang W, Sun W. Variational mesh adaptation: Error estimates and monitor functions[J]. J Comput Phys, 2003, 184:619 - 648.
- [ 6 ] Gui W, Babuška. The  $h, p$  and  $h - p$  version of the finite element method in one dimension. part 1: The adaptive  $h - p$  version [J]. Numerische Mathematic, 1986, 48.
- [ 7 ] Oden J T, Rachowicz W, Demkowica L. Toward a universal  $h - p$  adaptive finite element strategy, part 3: Design of  $h - p$  meshes [J]. Comp Meth in Appl Mech and Engng, 1989, 77:181 - 212.
- [ 8 ] Mo Zeyao, Shen Longjun, Gabriel Wittum. Parallel adaptive multigrid algorithm for 2D 3-T diffusion equations[J]. Int J of Computer

- Math, 2004, **81**(3):361 - 374.
- [ 9 ] Chen Long, Sun Pengtao, Xu Jinchao. Optimal anisotropic simplicial meshes for minimizing interpolation errors in  $L^p$ -norm [J]. Submitted to Math Comp, 2003.
- [10] Zienkiewicz O C, Zhu J Z. The superconvergence patch recovery and a posteriori error estimates. part 1: The recovery techniques[J]. Int J Number Methods Engrg, 1992, **33**:1331 - 1364.
- [11] Zienkiewicz O C, Zhu J Z. The superconvergence patch recovery and a posteriori error estimates. part 2: Error estimates and adaptivity [J]. Int J Number Methods Engrg, 1992, **33**:1365 - 1382.
- [12] Bank R E, Xu J. Asymptotically exact a posteriori error estimators, part : General unstructured grids[J]. SIAM J on Numerical Analysis, 2003, **41**(6):2313 - 2332.
- [13] Carstensen C, Bartels S. Each averaging technique yields reliable a posteriori error control in FEM on unstructured grids. I. low order conforming, nonconforming, and mixed FEM[J]. Math Comp, 2002, **71**(239):945 - 969.
- [14] Ma X, Shu S, Zhou A. Symmetric finite volume discretization for parabolic problems[J]. Comput Methods Appl Mech Engrg, 2003, **192**:4467 - 4485.

## A Mesh Adaptive Method for Two-Dimensional Three-Temperature Heat Conduction Equations

JIANG Jun, SHU Shi, HUANG Yunqing, CHEN Long

(School of Math and Computational Science, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China)

**Abstract:** A mesh adaptation approach based on Hessian matrix is proposed to solve two-dimensional heat conduction equations with coupled electron, iron and photon temperatures. Three kinds of adaptive mesh and two adaptation methods based on gradient and flux of the photon finite element solution are used. It is shown that the energy conservation error and computation efficiency of the approach are improved.

**Key words:** laser-driven inertial confinement fusion; two-dimensional three-temperature heat conduction equation; mesh adaptation; Hessian matrix