ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2000, т. 231, с. 1–23

УДК 517.938

Некоторые свойства косых произведений над подковой и соленоидом[1]

©2000 г. А. С. Городецкий, Ю. С. Ильяшенко

Поступило в феврале 2000 г.

Исследуются косые произведения над сдвигом Бернулли и над соленоидом Смейла–Вильямса со слоем S^1. Предполагается, что отображение в слое гёльдерово зависит от точки в базе (именно такие косые произведения появляются при изучении частично гиперболических множеств). Доказывается, что в пространстве косых произведений с таким свойством существует открытое множество, отображения из которого имеют плотные множества притягивающих и отталкивающих вдоль слоя периодических орбит, а также плотные орбиты с нулевым (вдоль слоя) показателем Ляпунова.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Действия свободных полугрупп и каскады. Существует связь между динамикой, порожденной действием свободных полугрупп диффеоморфизмами на компактных многообразиях, с одной стороны, и классическими динамическими системами — итерациями диффеоморфизмов на многообразиях большей размерности — с другой.

На первый взгляд, орбиты действия свободной полугруппы могут быть гораздо сложнее, чем орбиты действия циклической группы. Однако ценой увеличения размерности фазового пространства *все эффекты, наблюдаемые в динамике, порожденной действием свободной полугруппы, могут быть перенесены на диффеоморфизмы.*

Этот эвристический принцип реализуется с помощью следующей конструкции. Действие свободной полугруппы с N образующими f_i — диффеоморфизмами компактного многообразия M — тесно связано с действием одного гомеоморфизма на декартовом произведении пространства Σ^N двусторонних последовательностей из N символов на многообразие M. Пространство Σ^N является базой этого произведения, а многообразие M — слоем. Упомянутый гомеоморфизм — косое произведение над сдвигом Бернулли $\sigma\colon \Sigma^N \to \Sigma^N$ — задается следующей формулой:

$$F\colon\ \Sigma^N \times M \to \Sigma^N \times M, \quad (\omega, \varphi) \mapsto (\sigma\omega, f_{\omega_0}(\varphi)). \tag{1.1}$$

Орбиты действия полугруппы с образующими f_i совпадают с проекциями на слой вдоль базы положительных полутраекторий отображения F. Таким образом, все эффекты, наблюдаемые в динамике действия свободной полугруппы на M, наблюдаются также в каскаде, порожденном гомеоморфизмом (1.1).

Косое произведение (1.1) называется *ступенчатым* по следующей причине. Рассмотрим отображение, отличающееся от (1.1) тем, что отображение в слое зависит теперь от *всей*

[1]Работа выполнена обоими авторами при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 98-01-00455) и вторым автором при частичной финансовой поддержке NSF DMS (грант 997-0372).

последовательности в базе, а не от одного ее нулевого элемента:

$$G\colon\ \Sigma^N \times M \to \Sigma^N \times M, \quad (\omega,\varphi) \mapsto (\sigma\omega, f_\omega(\varphi)). \tag{1.2}$$

Такие косые произведения называются *мягкими*. Ступенчатые произведения выделяются среди мягких требованием

$$f_\omega = f_{\omega_0}. \tag{1.3}$$

Для них отображение в слое постоянно на цилиндре, состоящем из всех последовательностей с общим нулевым элементом. Отсюда происходит название.

Следующий шаг — гладкая реализация гомеоморфизма (1.1). Рассмотрим N непересекающихся "горизонтальных" прямоугольников D_i и отображение подковы Смейла S объединения D этих прямоугольников на объединение D' N непересекающихся "вертикальных" прямоугольников. У диффеоморфизма S есть гиперболическое инвариантное множество Λ, ограничение диффеоморфизма на которое топологически эквивалентно сдвигу Бернулли $\sigma\colon \Sigma^N \to \Sigma^N$. Рассмотрим диффеоморфизм

$$\mathfrak{F}\colon\ D \times M \to D' \times M, \quad \mathfrak{F}(x,\varphi) = (S(x), f_x(\varphi)), \tag{1.4}$$

$$f_x = f_i \qquad \text{при}\ \ x \in D_i. \tag{1.5}$$

Отображение $\mathfrak{F}$ имеет инвариантное множество $\Lambda \times M$. Ограничение отображения $\mathfrak{F}$ на это множество сопряжено с отображением (1.1). Таким образом, свойства, обнаруженные при исследовании полугруппы, порожденной диффеоморфизмами $f_i\colon M \to M$, реализуются гладким отображением $\mathfrak{F}$. Впрочем это отображение чрезвычайно вырождено. Последний (и самый трудный) шаг программы — доказать, что эти свойства сохраняются при малом возмущении отображения $\mathfrak{F}$.

Полученные на этом пути результаты изложены в [1]. В цитированной работе теоремы приводятся лишь с набросками доказательств или совсем без них. Настоящая статья — первая в серии работ, излагающих эту программу подробно. В ней исследуются косые произведения (1.4) над подковой Смейла и сходные с ними, но более сложные косые произведения над соленоидом. Косые произведения над подковой имеют инвариантные множества, в окрестности которых почти все не принадлежащие этим множествам точки проводят лишь конечное время. Напротив, изучаемые ниже инвариантные множества косых произведений над соленоидом являются максимальными аттракторами и их исследование представляет особый интерес.

1.2. Гладкие динамические системы и мягкие косые произведения. Малые возмущения отображений (1.4), удовлетворяющих определенным требованиям на растяжения и сжатия, имеют инвариантные частично гиперболические множества, гомеоморфные произведению $\Sigma^N \times M$ (см. теорему 7.1 из [2], а также теорему 2 из [1]). Слои этого инвариантного множества гёльдеровым образом зависят от точек базы (теорема 3 из [1]). Этот результат, доказанный первым автором, составит содержание отдельной статьи.

Ограничение малого возмущения отображения (1.4) на описанное выше инвариантное множество имеет вид (1.2). Указанная выше гёльдерова зависимость слоев от точки базы мотивирует следующее требование на мягкие косые произведения, которые мы будем рассматривать ниже:

$$d_{C^r}(f_\omega, f_{\omega'}) \le C(d_{\Sigma^N}(\omega,\omega'))^\alpha, \tag{1.6}$$

где C, α — некоторые положительные константы. Подробнее это требование гёльдеровой зависимости отображения в слое от точки в базе мотивировано в п. 4.1.

1.3. Основные результаты. В разд. 2 описываются свойства ступенчатых косых произведений, в разд. 3 — мягких. При этом оказывается, что свойство гёльдеровости (1.6) позволяет переносить свойства ступенчатых косых произведений на случай мягких.

Теорема 1 из разд. 2 утверждает, что существует открытое множество в пространстве ступенчатых систем (1.1), отображения из которого имеют

i) плотные множества периодических точек разных индексов;

ii) плотные орбиты с нулевым показателем Ляпунова.

Теорема 2 из разд. 3 утверждает, что существует открытое множество в пространстве мягких систем (1.2) со свойством гёльдеровости (1.6), обладающее теми же свойствами. Вместе с теорией инвариантных частично гиперболических множеств, упомянутой в п. 1.2, эти результаты позволят доказать локальную типичность свойств i), ii) для гладких динамических систем.

В разд. 4 рассматриваются мягкие динамические системы, которые могут быть реализованы гладкими системами

$$\mathfrak{F}\colon\ T\times M\to T\times M,\quad \mathfrak{F}(x,\varphi)=(S(x),f_x(\varphi)),$$

в предположении, что T — полноторие, $S\colon T\to T$ — не подкова Смейла, а соленоид Смейла–Вильямса. Свойство i) доказывается для таких систем. Вместе с теорией, упомянутой в п. 1.2, это позволит доказать существование аттракторов гладких отображений с плотными множествами периодических точек разных индексов и утверждать, что это свойство локально типично. Гипотеза о существовании таких отображений была сформулирована в [3] и доказана в [4]. Наши методы позволят, в частности, добавить к этому свойству наличие плотной орбиты с нулевым промежуточным показателем Ляпунова.

Результаты разд. 2, 3 и п. 4.1 принадлежат первому автору, остальные результаты разд. 4 — второму.

2. ГРУБЫЕ СВОЙСТВА СТУПЕНЧАТЫХ КОСЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

2.1. Свойства ступенчатых систем: формулировка. В этом разделе рассматриваются итерации ступенчатых отображений (1.1). Очевидно, при $n>0$

$$F^n(\omega,\varphi)=(\sigma^n\omega,\bar f_n[\omega](\varphi)),$$

где

$$\bar f_n[\omega]=f_{\omega_{n-1}}\circ\ldots\circ f_{\omega_0};\tag{2.1}$$

$$F^{-n}(\omega,\varphi)=(\sigma^{-n}\omega,\bar f_{-n}[\omega](\varphi)),$$

где

$$\bar f_{-n}[\omega]=f^{-1}_{\omega_{-n}}\circ\ldots\circ f^{-1}_{\omega_{-1}}.\tag{2.2}$$

Положим $\bar f_0[\omega]=\mathrm{id}$. Мы также будем пользоваться обозначением $C_{\bar\alpha}=\{\omega\in\Sigma^2\mid \omega_j=\alpha_j,\ -n\le j\le n-1\}$, где $\bar\alpha=\alpha_{-n}\ldots\alpha_0\ldots\alpha_{n-1}$ — отрезок из 0 и 1.

Доказательства экзотических свойств орбит отображения F основаны на том, что, выбирая начальное условие, мы прежде всего выбираем последовательность ω; этот выбор находится в нашей власти. Пользуясь свободой действия, предоставляемой действием свободной полугруппы на слое, мы можем приписывать нули и единицы к уже построенному отрезку последовательности ω так, чтобы суперпозиции (2.1) и (2.2) имели нужные нам свойства.

Теорема 1. *Существуют такой интервал $I \subset \mathbb{R}$, $0 \in I$, и такие открытые множества $U_0, U_1 \subset \mathrm{Diff}^1(S^1)$, что для любых f_0, f_1, $f_j \in U_j$, отображение F обладает следующими свойствами.*

(i) *Периодические орбиты отображения F с мультипликатором вдоль окружности, по модулю большим единицы, плотны в $\Sigma^2 \times S^1$. То же выполнено для периодических орбит с мультипликатором, по модулю меньшим единицы.*

(ii) *Для любого $\lambda \in I$ существует плотная в $\Sigma^2 \times S^1$ орбита с ляпуновским показателем вдоль окружности, равным λ.*

(iii) *Если орбита последовательности $\omega \in \Sigma^2$ под действием сдвига Бернулли σ плотна в Σ^2, то для любого $\varphi \in S^1$ орбита точки (ω, φ) под действием F плотна в $\Sigma^2 \times S^1$.*

В качестве множеств U_0 и U_1 возьмем малые C^1-окрестности следующих диффеоморфизмов g_0, g_1.

Пусть g_0 есть поворот окружности $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ на малый угол $b < \frac{1}{20}$. Пусть g_1 есть сохраняющий ориентацию диффеоморфизм с двумя неподвижными точками, аттрактором p_0 и репеллером q_0; все остальные точки сдвигаются от q_0 к p_0 под действием положительных итераций g_1. Предположим также, что $q_0 = 0$, $p_0 = \frac{1}{2}$ и g_1 линейно в некоторых окрестностях q_0 и p_0. А именно на $O(q_0) = (-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}) \subset S^1$ отображение g_1 является растяжением $\varphi \mapsto a\varphi$, $a > 1$, на $O(p_0) = (\frac{3}{8}, \frac{5}{8}) \subset S^1$ отображение g_1^{-1} имеет сходный вид $\varphi \mapsto a(\varphi - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}$ и $\max_{S^1} |Dg_1| \le a$, $\max_{S^1} |Dg_1^{-1}| \le a$.

В качестве окрестности U_i, $i = 0, 1$, в теореме 1 возьмем множество диффеоморфизмов f_i, удовлетворяющих условию
$$d_{C^1}(f_i, g_i) < \delta, \qquad i = 0, 1, \tag{2.3}$$
где δ мало по сравнению с $\ln a$ и b. Таким образом, отображение f_0 близко к повороту, отображение f_1 имеет две неподвижные точки, аттрактор p и репеллер q. Обозначим через W^+ дугу $(-\frac{1}{8} + \delta, \frac{1}{8} - \delta)$, а через W^- дугу $(\frac{3}{8} + \delta, \frac{5}{8} - \delta)$. Отображение f_1 дугу W^+ растягивает (а именно $|f_1'|_{W^+}| > a - \delta$), а дугу W^- сжимает (а именно $|f_1'|_{W^-}| < a^{-1} + \delta$).

Выберем и зафиксируем произвольные $f_0 \in U_0$ и $f_1 \in U_1$. Докажем, что соответствующее отображение F (1.1) обладает свойствами (i), (ii), (iii).

2.2. Искажение дуг.

Лемма 2.1 (об искажении дуг). *Пусть заданы отрезок $\bar{\alpha} = \alpha_{-n} \dots \alpha_{-1}\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}$ (из 0 и 1) и дуга $J \subset S^1$. Тогда найдутся такие отрезки $\bar{\beta} = \beta_{-m} \dots \beta_0 \dots \beta_{m-1}$, $\bar{\beta}' = \beta'_{-m'} \dots \beta'_0 \dots \beta'_{m'-1}$ и $\bar{\beta}'' = \beta''_{-m''} \dots \beta''_0 \dots \beta''_{m''-1}$ из 0 и 1, что $\beta_i = \beta'_i = \beta''_i = \alpha_i$ при $-n \le i \le n-1$ и выполнено следующее*:

1) *если $\omega \in C_{\bar{\beta}}$, то $\bar{f}_m[\omega](J) \subset W^- \subset \bar{f}_{-m}[\omega](J)$, причем*
$$\big|(\bar{f}_m[\omega])'|_J\big| < 1, \qquad \big|(\bar{f}_{-m}[\omega])'|_{(\bar{f}_{-m}[\omega])^{-1}(W^-)}\big| > 1;$$

2) *если $\omega' \in C_{\bar{\beta}'}$, то $\bar{f}_{-m'}[\omega'](J) \subset W^+ \subset \bar{f}_{m'}[\omega'](J)$, причем*
$$\big|(\bar{f}_{-m'}[\omega'])'|_J\big| < 1, \qquad \big|(\bar{f}_{m'}[\omega'])'|_{(\bar{f}_{m'}[\omega'])^{-1}(W^+)}\big| > 1;$$

3) *если $\omega'' \in C_{\bar{\beta}''}$, то $S^1 - W^- \subset \bar{f}_{m''}[\omega''](J)$, $S^1 - W^+ \subset \bar{f}_{-m''}[\omega''](J)$.*

Доказательство. Положим $s = [\frac{1}{b-\delta}] + 1$. Под действием s итераций отображения f_0 любая точка $\varphi \in S^1$ совершает более одного полного оборота, двигаясь “малыми шагами” $f_0(\varphi) - \varphi \in (b - \delta, b + \delta)$.

Предложение 2.1. *Пусть задана дуга $J^* \subset S^1$. Найдется такая конечная композиция h отображений f_0 и f_1, что длина дуги $h(J^*)$ не меньше $2b$.*

Доказательство. Если длина дуги J^* меньше $2b$, то с помощью не более чем s применений f_0 дуга J^* может быть отображена внутрь дуги W^+, после чего применение f_1 растягивает образ дуги J^* с мультипликатором не меньше $(a - \delta)$. После k применений этой процедуры мы получим дугу длины не меньше $(1-\delta)^{sk}(a-\delta)^k|J^*|$. Для достаточно большого k получим дугу длины больше $2b$. Предложение 2.1 доказано.

Замечание. Предложение 2.1 останется верным, если взять вместо отображений f_0 и f_1 отображения f_0^{-1} и f_1^{-1}.

Продолжим доказательство леммы 2.1. Пусть $f^+ = f_{\alpha_{n-1}} \circ \ldots \circ f_{\alpha_0}$, $f^- = f^{-1}_{\alpha_{-n}} \circ \ldots \circ f^{-1}_{\alpha_{-1}}$. Обозначим $J^+ = f^+(J)$ и $J^- = f^-(J)$.

Построим теперь отрезок $\bar{\beta}$, удовлетворяющий свойству 1). Это эквивалентно построению конечной композиции $h^+ = f_{\beta_{m-1}} \circ \ldots \circ f_{\beta_n}$ отображений f_0 и f_1 и конечной композиции $h^- = f^{-1}_{\beta_{-m}} \circ \ldots \circ f^{-1}_{\beta_{-n-1}}$ отображений f_0^{-1} и f_1^{-1}, так что отображения $h^+ \circ f^+$ и $h^- \circ f^-$ удовлетворяют свойству 1), а именно выполнены включения $h^+ \circ f^+(J) \subset W^- \subset h^- \circ f^-(J)$, причем $\big|(h^+ \circ f^+)'|_J\big| < 1$, $\big|(h^- \circ f^-)'|_{(h^- \circ f^-)^{-1}(W^-)}\big| > 1$.

Для построения h^+ применим предложение 2.1 к дуге $J^* = S^1 - \bar{J}^+$. После этого с помощью не более s отображений f_0 накроем образом дуги $S^1 - \bar{J}^+$ (длина которого теперь не меньше $2b$) репеллер q. Затем применим настолько большое число отображений f_1, чтобы образ дуги $S^1 - \bar{J}^+$ растянулся и покрыл $S^1 - W^-$. Образ дуги J^+ при этом попадет внутрь W^-, и, поскольку отображение f_1 сжимает дугу W^-, применение еще некоторого конечного числа отображений f_1 обеспечит выполнение условия на производную (а именно $\big|(h^+ \circ f^+)'|_J\big| < 1$).

Теперь построим композицию h^- отображений f_0^{-1} и f_1^{-1}. Для этого применим предложение 2.1 к дуге $J^* = J^-$ и отображениям f_0^{-1} и f_1^{-1}. Образ дуги J^- при этом будет иметь длину не меньше $2b$. После этого с помощью не более s отображений f_0^{-1} накроем образом дуги J^- точку p (которая является репеллером для отображения f_1^{-1}). Затем применим настолько большое число отображений f_1^{-1}, чтобы образ дуги J^- покрывал дугу W^-. Поскольку отображение f_1^{-1} растягивает дугу W^-, применение еще некоторого числа отображений f_1^{-1} обеспечит выполнение условия на производную (а именно $\big|(h^- \circ f^-)'|_{(h^- \circ f^-)^{-1}(W^-)}\big| > 1$).

Осталось заметить, что к построенной композиции отображений f_0 и f_1 можно применять произвольное конечное число отображений f_1, сохраняя требуемые свойства; соответственно к композиции отображений f_0^{-1} и f_1^{-1} можно применять отображения f_1^{-1}. Следовательно, можно считать, что композиции h^+ и h^- имеют одинаковую длину (это не принципиально в случае ступенчатых систем, но важно при обобщении на случай мягких систем). Отрезок $\bar{\beta}$ построен.

Отрезок $\bar{\beta}'$ строится аналогично.

Отрезок $\bar{\beta}''$ также строится похожим образом; ситуация только упрощается, поскольку нет каких-либо дополнительных требований на производные. Лемма 2.1 доказана.

2.3. Периодические орбиты. В этом пункте доказывается утверждение (i) теоремы 1.

Докажем, что периодические орбиты отображения F (1.1) с мультипликатором вдоль окружности, по модулю меньшим единицы, плотны в $\Sigma^2 \times S^1$. Сначала заметим, что множества вида $C_{\bar{\alpha}} \times J \subset \Sigma^2 \times S^1$ (где $\bar{\alpha} = \alpha_{-n} \ldots \alpha_0 \ldots \alpha_{n-1}$ — отрезок из 0 и 1, J — дуга на окружности S^1) образуют базу топологии пространства $\Sigma^2 \times S^1$. Поэтому достаточно показать, что через любое множество вида $C_{\bar{\alpha}} \times J$ проходит требуемая периодическая траектория. Для этого воспользуемся утверждением 1) леммы 2.1: найдется такой отрезок $\bar\beta = \beta_{-m}\dots\beta_0\dots\beta_{m-1}$, что если $\omega \in C_{\bar\beta}$, то $\bar f_m[\omega](J) \subset W^- \subset \bar f_{-m}[\omega](J)$, причем $|(\bar f_m[\omega])'|_J| < 1$, $|(\bar f_{-m}[\omega])'|_{(\bar f_{-m}[\omega])^{-1}(W^-)}| > 1$. Сразу заметим, что из второго неравенства на производную следует, что $|((\bar f_{-m}[\omega])^{-1})'|_{(W^-)}| < 1$. Возьмем последовательность $\omega \in C_{\bar\beta}$, периодическую с периодом $\bar\beta$ (т.е. $\sigma^{2m}\omega = \omega$, $\omega \in C_{\bar\beta}$). Отображение $\bar f_{2m}[\omega]\colon S^1 \to S^1$ имеет неподвижную точку $\varphi_0 \in J$ с мультипликатором меньше единицы. Действительно, $\bar f_{2m}[\omega] = (\bar f_{-m}[\omega])^{-1} \circ \bar f_m[\omega]$, дуга J под действием отображения $\bar f_m[\omega]$ попадает внутрь дуги W^- и при этом сжимается. Но вся дуга W^- под действием отображения $(\bar f_{-m}[\omega])^{-1}$ со сжатием отображается внутрь дуги J. Таким образом, $\bar f_{2m}[\omega]$ отображает дугу J в себя со сжатием, следовательно, имеет неподвижную точку $\varphi_0 \in J$ с мультипликатором меньше единицы. Но тогда точка (ω, φ_0) является искомой периодической точкой для отображения F.

Существование плотного множества периодических орбит с мультипликатором вдоль окружности, большим единицы, доказывается аналогично с использованием утверждения 2) леммы 2.1.

2.4. Отрезки плотности.

Лемма 2.2. *Пусть заданы отрезок $\bar\alpha = \alpha_{-n}\dots\alpha_{-1}\alpha_0\dots\alpha_{n-1}$ (из 0 и 1) и дуга $J \subset S^1$. Найдется такой конечный отрезок $\bar\gamma = \gamma_0\gamma_1\dots\gamma_l$ из 0 и 1, что если последовательность $\omega \in \Sigma^2$ содержит отрезок $\bar\gamma$, то для любой точки $\varphi \in S^1$ орбита точки $(\omega,\varphi) \in \Sigma^2 \times S^1$ под действием отображения F пересекает множество $C_{\bar\alpha} \times J \subset \Sigma^2 \times S^1$.*

Доказательство. Воспользуемся утверждением 3) леммы 2.1: найдется такой отрезок $\bar\beta = \beta_{-m}\dots\beta_0\dots\beta_{m-1}$, $\beta_i = \alpha_i$ при $-n \le i \le n-1$, что если $\omega \in C_{\bar\beta}$, то $S^1 - W^- \subset \bar f_m[\omega](J)$, $S^1 - W^+ \subset \bar f_{-m}[\omega](J)$. Отметим, что $(S^1 - W^-) \cup (S^1 - W^+) = S^1$. Остается заметить, что в качестве отрезка $\bar\gamma$ можно взять дважды написанный отрезок $\bar\beta$, т.е. $\gamma_{-2m}\dots\gamma_{-1} = \gamma_0\dots\gamma_{2m-1} = \beta_{-m}\dots\beta_{m-1}$. Действительно, пусть $\omega^* \in \Sigma^2$ содержит отрезок $\bar\gamma$. Без ограничения общности можно считать, что $\bar\gamma$ — "центральный" отрезок последовательности ω^*: $\bar\gamma = \omega^*_{-2m}\dots\omega^*_0\dots\omega^*_{2m-1}$. Сразу заметим, что тогда $\sigma^m\omega^* \in C_{\bar\alpha}$ и $\sigma^{-m}\omega^* \in C_{\bar\alpha}$. Заметим также, что для любой последовательности $\omega \in C_{\bar\beta}$ $\bar f_m[\omega^*] = (\bar f_{-m}[\omega])^{-1}$, а $\bar f_{-m}[\omega^*] = (\bar f_m[\omega])^{-1}$. Возьмем теперь произвольную точку $\varphi \in S^1$. Так как $(S^1 - W^-) \cup (S^1 - W^+) = S^1$, то точка φ лежит по крайней мере на одной из дуг $S^1 - W^-$ или $S^1 - W^+$. Если $\varphi \in S^1 - W^-$, то $\bar f_{-m}[\omega^*](\varphi) \in \bar f_{-m}[\omega^*](S^1 - W^-) = (\bar f_m[\omega])^{-1}(S^1 - W^-) \subset J$. Если же $\varphi \in S^1 - W^+$, то $\bar f_m[\omega^*](\varphi) \in \bar f_m[\omega^*](S^1 - W^+) = (\bar f_{-m}[\omega])^{-1}(S^1 - W^+) \subset J$. Итак, в любом случае орбита точки (ω^*, φ) под действием отображения F пересекает $C_{\bar\alpha} \times J$. Лемма 2.2 доказана.

2.5. Показатели Ляпунова. Если заданы точка $\varphi \in S^1$ и последовательность $\omega \in \Sigma^2$, то при $n \in \mathbb{N}$ положим

$$\lambda_n(\varphi) = \ln|\bar f_n'(\varphi)| = \sum_{i=0}^{n-1} \ln|f'_{\omega_i}(\bar f_i(\varphi))|, \qquad \lambda_{-n}(\varphi) = \ln|\bar f'_{-n}(\varphi)| = -\sum_{i=0}^{n-1} \ln|f'_{\omega_{-i}}(\bar f_{-i}(\varphi))|.$$

Обозначим также

$$s = \left[\frac{1}{b-\delta}\right] + 1, \qquad \mu = (\ln(a-\delta) + s\ln(1-\delta)), \qquad I = \frac{1}{s}(-\mu,\mu). \tag{2.4}$$

Лемма 2.3. *Существует такая константа $C > 0$, что выполнено следующее. Для любой точки $\varphi \in S^1$, любых $f_0 \in U_0$, $f_1 \in U_1$ и любого $\lambda \in I$ найдется такая последовательность $\omega(\varphi) \in \Sigma^2$, что $|\lambda_n(\varphi) - \lambda n| < C$ и $|\lambda_{-n}(\varphi) + \lambda n| < C$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольную точку $\varphi \in S^1$ и построим правую часть требуемой последовательности $\omega(\varphi)$: $\omega_0\omega_1\dots\omega_k\dots$ Левая часть строится аналогично, так как отображения (f_0^{-1}, f_1^{-1}) обладают теми же свойствами, что и (f_0, f_1).

Положим для удобства

$$\nu_k = \lambda_k(\varphi) - \lambda k.$$

Сразу заметим, что для любого k выполнено неравенство

$$|\nu_{k+1} - \nu_k| < \ln L + |I|. \tag{2.5}$$

Отметим, что если построена конечная часть последовательности $\omega(\varphi)$, а именно $\omega_0, \dots, \omega_{n-1}$, то определены $\lambda_k(\varphi)$ и ν_k для $1 \le k \le n$, а также $\varphi_k := \bar{f}_k[\omega](\varphi)$.

Мы опишем алгоритм построения последовательности $\omega(\varphi)$, который на каждом шаге использует значение функций ν_k.

Допустим, что построен отрезок $\omega_0\dots\omega_{k-1}$.

Если $\nu_k \ge 0$, то положим $\omega_k = 1$ в случае $\varphi_k \in W^-$ и $\omega_k = 0$ в случае $\varphi_k \in S^1 - W^-$.

Если $\nu_k < 0$, то положим $\omega_k = 1$ в случае $\varphi_k \in W^+$ и $\omega_k = 0$ в случае $\varphi_k \in S^1 - W^+$.

Элемент ω_k определен; повторяем процедуру, увеличив k на единицу.

Покажем, что при этом построении мы получим последовательность $\omega_0\dots\omega_k\dots$, для которой величина $|\nu_k|$ не будет превосходить $C = 2s(\ln L + |I|)$.

Предложение 2.2. *Если $|\nu_k| \ge s(\ln L + |I|)$, то $|\nu_{k+s}| < |\nu_k|$.*

Доказательство. Пусть $\nu_k \ge s(\ln L + |I|)$ (случай $\nu_k \le -s(\ln L + |I|)$ рассматривается аналогично). Тогда в силу (2.5) $\nu_{k+l} > 0$ для любого l: $0 < l \le s$.

Среди элементов $\omega_k, \omega_{k+1}, \dots, \omega_{k+s-1}$ обязательно найдется хотя бы одна 1. Действительно, если все они равны 0, то $\varphi_{k+l} = f_0(\varphi_{k+l-1})$ для любого l: $0 < l \le s$. Отображение f_0 близко к повороту на b, поэтому найдется такое $t < s$, что $\varphi_{k+t} \in W^-$, и по нашему алгоритму мы должны выбрать $\omega_{k+t} = 1$. Противоречие.

Заметим, что для любого l: $0 < l \le s$ если $\omega_{k+l} = 1$, то λ_{k+l+1} уменьшится по сравнению с λ_{k+l} не меньше чем на $\ln(a-\delta)$ (поскольку отображение f_1 сжимает дугу W^-), а если $\omega_{k+l} = 0$, то λ_{k+l+1} не может увеличиться по сравнению с λ_{k+l} больше чем на $|\ln(1-\delta)|$. Поскольку хотя бы один элемент ω_{k+l}, $0 < l \le s$, равен 1, то $\lambda_{k+s} \le \lambda_k - \mu$. Но отрезок I (2.4) выбран так, что $\mu > |\lambda s|$, поэтому $\nu_{k+s} = \lambda_{k+s} - (k+s)\lambda < \lambda_k - k\lambda = \nu_k$. Предложение 2.2 доказано.

Из предложения 2.2 и (2.5) теперь следует, что $|\nu_k| \le 2s(\ln L + |I|)$. Действительно, если нашлось такое k, что $|\nu_k| > 2s(\ln L + |I|)$, то из (2.5) следует, что $|\nu_{k-s}| > s(\ln L + |I|)$, но тогда по предложению 2.2 $|\nu_{k-s}| > |\nu_k| > 2s(\ln L + |I|)$. Индуктивно получаем, что если $k - ms > 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, то $|\nu_{k-ms}| > |\nu_k| > 2s(\ln L + |I|)$. Но заведомо $|\nu_l| \le s(\ln L + |I|)$ при $|l| \le s$. Противоречие. Лемма 2.3 доказана.

Перейдем теперь собственно к доказательству свойства (ii) в теореме 1. Зафиксируем $\lambda \in I$ и построим точку (ω^*, φ), имеющую плотную в $\Sigma^2 \times S^1$ орбиту с показателем Ляпунова вдоль окружности, равным λ.

Пусть $\{C_{\bar{\alpha}_i} \times J_i\}$ — счетная база топологии пространства $\Sigma^2 \times S^1$. По лемме 2.2 для множества $C_{\bar{\alpha}_i} \times J_i$ найдется такой отрезок $\bar{\gamma}_i$, что если последовательность $\omega \in \Sigma^2$ содержит $\bar{\gamma}_i$, то для любого $\varphi \in S^1$ орбита точки (ω, φ) под действием F (1.1) проходит через $C_{\bar{\alpha}_i} \times J_i$. Обозначим длину отрезка $\bar{\gamma}_i$ через k_i.

Выберем некоторую последовательность $\{n_i\}$, $i \geq 0$, так, чтобы

$$\frac{(i+2)C + (k_1 + k_2 + \ldots + k_{i+1})(\ln L + |I|)}{n_i} < \frac{1}{i}, \tag{2.6}$$

где C — константа из леммы 2.3. Определим также последовательность $\{N_i\}$: $N_0 = n_0$, $N_l = N_{l-1} + k_l + n_l$.

Зафиксируем точку $\varphi \in S^1$ и построим правую часть последовательности ω^* индуктивным образом. В качестве базы индукции рассмотрим последовательность $\omega(\varphi)$, удовлетворяющую требованиям леммы 2.3, и возьмем первые ее n_0 элементов в качестве элементов ω^*. Итак, отрезок $\omega_0^* \ldots \omega_{N_0-1}^*$ построен.

Шаг индукции. Пусть построена последовательность $\omega_0^* \ldots \omega_{N_i-1}^*$. Допишем к ней отрезок $\bar{\gamma}_{i+1}$. Рассмотрим точку $\varphi_{N_i+k_{i+1}} = \bar{f}_{N_i+k_{i+1}}[\omega^*](\varphi)$ и последовательность $\omega(\varphi_{N_i+k_{i+1}})$, удовлетворяющую требованиям леммы 2.3. Возьмем первые ее n_{i+1} элементов в качестве следующих n_{i+1} элементов последовательности ω^*. Последовательность $\omega_0^* \ldots \omega_{N_{i+1}-1}^*$ построена.

Покажем, что построенная таким образом последовательность искомая. Как и выше, положим $\nu_l = (\lambda_l(\varphi) - l\lambda)$. По (2.5), дописывая к последовательности $\omega_0^* \ldots \omega_{N_i-1}^*$ отрезок $\bar{\gamma}_{i+1}$, мы увеличиваем $|\nu_{N_i}|$ не более чем на $k_{i+1}(\ln L + |I|)$: $|\nu_l| < |\nu_{N_i}| + k_{i+1}(\ln L + |I|)$ при $N_i \leq l \leq N_i + k_{i+1}$. Дописывая затем любой отрезок последовательности $\omega(\varphi_{N-i+k_{i+1}})$, мы увеличиваем $|\nu_{N_i+k_{i+1}}|$ не более чем на C по лемме 2.3. Следовательно, при $N_i \leq l \leq N_i + k_{i+1} + n_{i+1}$ $|\nu_l| \leq |\nu_{N_i}| + k_{i+1}(\ln L + |I|) + C \leq (i+2)C + (k_1 + k_2 + \ldots + k_{i+1})(\ln L + |I|)$. Последнее неравенство получается индукцией по i. Заметим, что при нашем предположении $l > n_i$. Следовательно, в силу (2.6) $|\nu_l|/l < \frac{1}{i}$, т.е. показатель Ляпунова для положительной полутраектории орбиты ω^* равен λ.

Левая часть последовательности ω^* строится аналогично.

2.6. Плотность. Как указывалось выше, открытые множества вида $C_\alpha \times J$, где $C_\alpha = \{\omega \mid \omega_j = \alpha_j,\ j \in \{-n, \ldots, n-1\}\}$ и J — дуга окружности S^1, образуют базу топологии пространства $\Sigma^2 \times S^1$. Если орбита последовательности $\omega \in \Sigma^2$ под действием сдвига Бернулли σ плотна в Σ^2, то она содержит любой наперед заданный отрезок из 0 и 1. Поэтому свойство (iii) теоремы 1 непосредственно следует из леммы 2.2.

3. ЛОКАЛЬНО ТИПИЧНЫЕ СВОЙСТВА МЯГКИХ СЛУЧАЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В этом разделе рассматриваются мягкие косые произведения

$$G\colon\ \Sigma^2 \times S^1 \to \Sigma^2 \times S^1, \quad (\omega, \varphi) \mapsto (\sigma\omega, f_\omega(\varphi)). \tag{3.1}$$

Для них доказывается локальная типичность свойств, аналогичных свойствам ступенчатых систем (см. п. 2.1). Схема доказательства для мягких систем — та же, что и для типичных: чтобы получить произведение отображений $f_{\sigma^i\omega}$ с нужными свойствами, последовательность ω строится индуктивно: к уже написанному ее отрезку дописываются справа и слева нули и единицы. Трудность состоит в том, что *никакой конечный отрезок последовательности ω не позволяет точно определить отображение $f_{\sigma^i\omega}$*; это отображение зависит теперь не от одного элемента и даже не от длинного отрезка, а от всей последовательности в целом.

Эта трудность обходится следующим образом. Если отрезок $\bar{\beta} = \beta_{-m} \ldots \beta_{m-1}$ последовательности ω фиксирован и достаточно длинен, то любые две последовательности ω, ω' с этим отрезком экспоненциально близки. Из неравенства (1.6) следует, что тогда и отображения $f_{\sigma^i\omega}$, $f_{\sigma^i\omega'}$ при $i \ll m$ близки. Их различие вносит экспоненциально малый вклад в различие φ-компонент точек $G^m(\omega, \varphi)$ и $G^m(\omega', \varphi)$, поэтому сами компоненты отличаются не слишком сильно. Эти соображения формализованы в лемме 3.1 из п. 3.2.

3.1. Формулировка результатов.

Теорема 2. *Существуют такие диффеоморфизмы* $g_0, g_1 \colon S^1 \to S^1$ *и такой интервал* $I \subset \mathbb{R}$, $0 \in I$, *что для любых* $C > 1$, $\alpha > 0$ *найдутся такие окрестности* $U_0(g_0)$, $U_1(g_1)$, *что выполнено следующее. Пусть отображение* G *вида* (3.1) *удовлетворяет условиям*

$$f_\omega \in U_{\omega_0} \qquad \text{для любого} \ \ \omega \in \Sigma^2; \tag{3.2}$$

$$L = \max_{\omega \in \Sigma^2} \max_{\varphi \in S^1} (\|Df_\omega(\varphi)\|, \|Df_\omega^{-1}(\varphi)\|); \tag{3.3}$$

$$d_{C^1}(f_\omega, f_{\omega'}) \le C(d_{\Sigma^2}(\omega, \omega'))^\alpha \tag{3.4}$$

для любых $\omega, \omega' \in \Sigma^2$;

$$L \cdot 2^{-\alpha} < 1. \tag{3.5}$$

Тогда отображение G *обладает следующими свойствами.*

(i) *Периодические орбиты отображения* G *с мультипликатором вдоль окружности, по модулю большим единицы, плотны в* $\Sigma^2 \times S^1$. *То же выполнено для периодических орбит с мультипликатором, по модулю меньшим единицы.*

(ii) *Для любого* $\lambda \in I$ *существует плотная в* $\Sigma^2 \times S^1$ *орбита с ляпуновским показателем вдоль окружности, равным* λ.

(iii) *Если орбита последовательности* $\omega \in \Sigma^2$ *под действием сдвига Бернулли* σ *плотна в* Σ^2, *то для любого* $\varphi \in S^1$ *орбита точки* (ω, φ) *под действием* G *плотна в* $\Sigma^2 \times S^1$.

В качестве искомых диффеоморфизмов возьмем диффеоморфизмы g_0 и g_1, определенные в п. 2.1. В качестве окрестностей $U_0(g_0)$ и $U_1(g_1)$ возьмем их достаточно малые C^2-окрестности:

$$d_{C^2}(f_\omega, g_{\omega_0}) < \delta. \tag{3.6}$$

Введем обозначения

$$\bar f_m[\omega] = f_{\sigma^{m-1}\omega} \circ \ldots \circ f_{\sigma\omega} \circ f_\omega,$$
$$\bar f_{-m}[\omega] = f^{-1}_{\sigma^{-m}\omega} \circ \ldots \circ f^{-1}_{\sigma^{-1}\omega}.$$

Это φ-компоненты точек $G^{\pm m}(\omega, \varphi)$. Положим

$$\bar f_0[\omega] = \mathrm{id}\,.$$

3.2. Леммы о погрешности.

Лемма 3.1 (о погрешности для координаты по слою)**.** *Пусть отображение* (3.1) *удовлетворяет требованиям* (3.3)–(3.6)*. Тогда существует такое* $K > 0$, $K = K(L, C, \alpha)$, *не зависящее от* δ, *что для любого* $m \in \mathbb{N}$ *неравенство*

$$d_{\Sigma^2}(\omega, \omega') \le 2^{-m} \tag{3.7}$$

влечет

$$d_{C^0}(\bar f_{\pm m}[\omega], \bar f_{\pm m}[\omega']) \le \gamma := K\delta^\beta, \tag{3.8}$$

где $\beta = 1 - \frac{\ln L}{\ln 2^\alpha}$.

Доказательство. Докажем лемму для $\bar{f}_m$; доказательство для $\bar{f}_{-m}$ совершенно аналогично. Для удобства ссылок в разд. 4 разобьем доказательство на два шага.

Шаг 1. Начнем с неравенства, справедливого для произвольных диффеоморфизмов окружности на себя, удовлетворяющих следующим требованиям:

$$\|Dh\| \le L \qquad \text{для} \quad h = f, g, f^{-1}, g^{-1};$$
$$|f(\varphi) - g(\psi)| \le L|\varphi - \psi| + d_C(f, g); \tag{3.9}$$

аналогичное неравенство справедливо для обратных отображений. Положим

$$\delta_l = d_{C^0}(\bar{f}_l[\omega], \bar{f}_l[\omega']). \tag{3.10}$$

Очевидно, $\delta_0 = 0$. Из неравенства (3.7) следует

$$d_{\Sigma^2}(\sigma^l\omega, \sigma^l\omega') \le 2^{-m+l}.$$

Из условия (3.4) получаем теперь

$$d_{C^0}(f_{\sigma^l\omega}, f_{\sigma^l\omega'}) \le C \cdot 2^{(-m+l)\alpha}. \tag{3.11}$$

Неравенство (3.9) влечет

$$\delta_{l+1} \le L\delta_l + C \cdot 2^{(-m+l)\alpha}.$$

Найдем члены рекуррентной последовательности, удовлетворяющие условиям

$$x_{l+1} = Lx_l + C \cdot 2^{(-m+l)\alpha}, \qquad x_0 = 0.$$

Очевидно, $x_l \ge \delta_l$. Имеем

$$x_l = C \cdot 2^{-m\alpha}\frac{2^{l\alpha} - L^l}{2^\alpha - L}. \tag{3.12}$$

Возьмем k так, что

$$C \cdot 2^{(-m+k)\alpha} \le 2\delta \le C \cdot 2^{(-m+k+1)\alpha}. \tag{3.13}$$

Тогда

$$\delta_k \le C\frac{2^{(-m+k)\alpha}}{2^\alpha - L} \le \frac{2\delta}{2^\alpha - L}.$$

Шаг 2. Заметим, что из (3.6) следует, что

$$\max_{\{\omega,\omega' | \omega_0 = \omega'_0\}} d_{C^0}(f_\omega, f_{\omega'}) \le 2\delta. \tag{3.14}$$

Члены последовательности после δ_k удобно оценивать из неравенства

$$\delta_{l+1} \le L\delta_l + 2\delta. \tag{3.15}$$

Оно следует из (3.14) и (3.9). Найдем член рекуррентной последовательности $\{y_l\}$, удовлетворяющей условиям

$$y_{k+i+1} = Ly_{k+i} + 2\delta, \qquad y_k = \frac{2\delta}{2^\alpha - L}.$$

Имеем

$$y_{k+i} = \frac{2\delta}{1 - L} + C(L, \alpha)\delta L^i, \qquad C(L, \alpha) = \frac{2(2^\alpha - 1)}{(2^\alpha - L)(L - 1)}. \tag{3.16}$$

В силу правого неравенства (3.13)

$$2^{(m-k)\alpha} \leq 2^\alpha \frac{C}{2\delta}, \qquad L^{m-k} \leq \left(2^\alpha \frac{C}{2\delta}\right)^{\ln L/\alpha \ln 2}.$$

Тогда

$$y_m \leq C(L,\alpha)\delta L^{m-k} \leq C(L,\alpha)\delta \left(2^\alpha \frac{C}{2\delta}\right)^{\ln L/\alpha \ln 2} = K(L,\alpha,C)\delta^\beta.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.2 (о погрешности для ляпуновских показателей). *Пусть отображение* G (3.1) *удовлетворяет требованиям* (3.3)–(3.6) *и, кроме того, отображения* f_ω *и* f_ω^{-1} *дважды непрерывно дифференцируемы по* φ, *причем вторая производная ограничена равномерно по* ω: $|D^2_\varphi f^{\pm 1}_\omega| < T$.

Тогда найдется такое $R > 0$, *не зависящее от* δ, *что для любого* $m \in \mathbb{N}$ *неравенство* (3.7) *влечет*

$$\left|\ln \bar{f}'_{\pm m}[\omega](\varphi) - \ln \bar{f}'_{\pm m}[\omega'](\varphi)\right| \leq R\delta^\beta,$$

где $\beta = 1 - \frac{\ln L}{\ln 2^\alpha}$, δ *— константа из* (3.6).

Доказательство. Нам нужно оценить сверху

$$Z_m := \left|\ln \bar{f}'_m[\omega](\varphi) - \ln \bar{f}'_m[\omega'](\varphi)\right|.$$

Положим для краткости

$$z_l := \left|f'_{\sigma^l\omega}(\bar{f}_l[\omega](\varphi)) - f'_{\sigma^l\omega'}(\bar{f}_l[\omega'](\varphi))\right|. \tag{3.17}$$

Воспользуемся неравенством, справедливым для всех $0 < w_1 < w_2$: $|\ln w_1 - \ln w_2| \leq \frac{w_2 - w_1}{w_1}$. Получим

$$Z_m \leq \sum_{l=0}^{m-1} \left|\ln f'_{\sigma^l\omega}(\bar{f}'_l[\omega](\varphi)) - \ln f'_{\sigma^l\omega'}(\bar{f}'_l[\omega'](\varphi))\right| \leq L \sum_{l=0}^{m-1} z_l.$$

В силу оценки (3.9), примененной к $f = f'_{\sigma^l\omega}$, $g = f'_{\sigma^l\omega'}$, получаем, используя обозначения (3.17) и (3.10), $z_l \leq T\delta_l + d_{C^1}(f_{\sigma^l\omega}, f_{\sigma^l\omega'})$. Здесь T — то же, что и в условии леммы. Выберем k так, что выполнено (3.13). Разобьем сумму в оценке для Z_m на две $\sum_{l=0}^k z_l$ и $\sum_{l=k+1}^{m-1} z_l$. Оценим первую сумму, используя (3.11):

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^k z_l &\leq \sum_{l=0}^k (T\delta_l + C\cdot 2^{(-m+l)\alpha}) \leq C\cdot 2^{-m\alpha} \sum_{l=0}^k \left(T\frac{2^{l\alpha} - L^l}{2^\alpha - L} + 2^{l\alpha}\right) = \\ &= R_0(C,T,\alpha,L)\cdot 2^{(-m+k)\alpha} \leq R_1(C,T,\alpha,L)\delta.\end{aligned}$$

Для оценки второй суммы используем неравенства $z_l \leq T\delta_l + 2\delta$, $\delta_l \leq C(L,\alpha)\delta L^l$ при $k < l < m$ (см. (3.16)) и $m - k \leq C_1 + \frac{\ln \delta^{-1}}{\ln 2^\alpha}$ (см. (3.13)). Получим

$$\sum_{l=k+1}^{m-1} z_l \leq \sum_{l=k+1}^{m-1} (T\delta_l + 2\delta) \leq \sum_{l=k+1}^{m-1} (C(L,\alpha)\delta L^{l-k} + 2\delta) \leq R_2(C,L,\alpha)\delta^\beta + R_3\delta\ln(\delta^{-1}).$$

В итоге получаем, что $Z_m \leq R\delta^\beta$.

Аналогичная оценка для обратных отображений доказывается точно так же.

3.3. Лемма о разделении точек на слое. Пусть $\bar\beta = \beta_{-m}\dots\beta_{m-1}$. Воспользуемся леммой о погрешности, чтобы оценить, как сильно отстоят друг от друга образы точки $\varphi \in S^1$ под действием отображений $\bar f_{\pm l}[\omega], \omega \in C_{\bar\beta}$. Для этого определим множества $V_{\pm}[\bar\beta](\varphi) = \{f_{\pm m}[\omega](\varphi) | \omega \in C_{\bar\beta}\}$.

Лемма 3.1 утверждает, что $\operatorname{diam} V_{\pm}[\bar\beta](\varphi) \le K\delta^{\beta}$ независимо от длины отрезка $\bar\beta$.

Если задан отрезок $\bar\beta = \beta_{-l}\dots\beta_0\dots\beta_{l-1}$, то положим $\Gamma_l = C_{\beta_{-l}\dots\beta_0\dots\beta_{l-1}}$.

Для фиксированного отрезка $\bar\beta$ определим множества $V_l(\varphi)$ и $V_{-l}(\varphi)$: $V_{\pm l}(\varphi) = \{\bar f_{\pm l}[\omega](\varphi) \mid \omega \in \Gamma_l\}$. Будем считать, что δ настолько мало (что достигается выбором в качестве U_0 и U_1 достаточно малых окрестностей отображений g_0 и g_1), что $\gamma = K\delta^{\beta} < \frac{b}{40}$. Тогда по лемме 3.1 о погрешности

$$\operatorname{diam} V_{\pm l}(\varphi) < \gamma < \frac{b}{40}. \tag{3.18}$$

Заметим также, что существуют такие дуги $W^+, W^- \subset S^1$, $|W^{\pm}| \ge \frac14 - \delta$, что для любой последовательности ω с $\omega_0 = 1$ отображение f_ω дугу W^+ растягивает (а именно $|f'_\omega|_{W^+}| > a - \delta$), а дугу W^- сжимает (а именно $|f'_\omega|_{W^-}| < a^{-1} + \delta$).

Наконец, определим множества

$$P = \{p \text{ — аттрактор отображения } f_\omega \mid \omega \in \Sigma^2,\ \omega_0 = 1\},$$
$$Q = \{q \text{ — репеллер отображения } f_\omega \mid \omega \in \Sigma^2,\ \omega_0 = 1\}.$$

Их размеры $\operatorname{diam} P$ и $\operatorname{diam} Q$ имеют величину порядка δ, поэтому, опять же выбрав δ достаточно малым, можно считать, что $\operatorname{diam} P < \gamma$ и $\operatorname{diam} Q < \gamma$.

В остальной части разд. 3 мы рассматриваем отображение G (3.1), удовлетворяющее условиям (3.3)–(3.6) в предположении, что константа δ мала по сравнению с $\ln a$ и b.

Лемма 3.3. *Пусть $\bar\alpha = \alpha_{-n}\dots\alpha_{n-1}$ — произвольный отрезок, $\varphi_1, \varphi_2 \in S^1$ — произвольные точки. Тогда существует такой отрезок $\bar\beta_m = \beta_{-m}\dots\beta_{m-1}$, $C_{\bar\beta} \subset C_{\bar\alpha}$, что*

$$d_{S^1}(V_{\pm}[\bar\beta](\varphi_1), V_{\pm}[\bar\beta](\varphi_2)) \ge 2b. \tag{3.19}$$

Здесь под расстоянием между двумя множествами на окружности подразумевается длина минимальной дуги, соединяющей точки этих множеств. Константа δ считается настолько малой, насколько это понадобится в доказательстве.

Доказательство леммы 3.3. Последовательность $\bar\beta_l = \beta_{-l}\dots\beta_{l-1}$ будем строить индуктивно, полагая $l \ge n$, $\bar\beta_n = \bar\alpha$ и дописывая на каждом шаге к отрезку $\bar\beta_l$ по одному знаку с каждой стороны. Шаг индукции определяется описанным ниже алгоритмом; когда алгоритм останавливается, построение заканчивается. Алгоритм состоит из двух шагов.

Шаг 1. Положим

$$M_{\pm l} = \min_{\omega \in C_{\bar\beta_l}} \bigl(\bar f_{\pm l}[\omega](\varphi_1), \bar f_{\pm l}[\omega](\varphi_2)\bigr).$$

Проверим выполнение следующих условий:

$$M_l > 3b, \tag{A1}$$
$$M_{-l} > 3b. \tag{A2}$$

Если оба условия выполнены, то алгоритм останавливается; ниже мы докажем, что полученный при этом отрезок $\bar\beta_m$ $(m = l)$ искомый. Если хотя бы одно из условий (A1), (A2) нарушено, переходим к шагу 2.

Шаг 2. Положим

$$W_{\pm l} = V_{\pm}[\bar\beta_l](\varphi_1) \cup V_{\pm}[\bar\beta_l](\varphi_2).$$

Проверим выполнение следующих условий:

$$W_l \subset W^+, \qquad \text{(B1)} \qquad\qquad W_{-l} \subset W^-. \qquad \text{(B2)}$$

Если условие (B1) (соответственно (B2)) выполнено, положим $\beta_l = 1$; иначе $\beta_l = 0$ (соответственно $\beta_{-(l+1)} = 1$; иначе $\beta_{-(l+1)} = 0$). Отрезок $\bar\beta_{l+1}$ построен; возвращаемся к шагу 1, увеличив l на 1.

Предложение 3.1. *Отрезок $\bar\beta_m$, построенный в момент остановки алгоритма, удовлетворяет требованиям леммы* 3.3.

Доказательство. По условию отрезок $\bar\beta_m$ удовлетворяет условиям (A1), (A2). Докажем, что из них следует неравенство (3.19) для V_+ и V_- соответственно. Рассмотрим только случай V_+; случай V_- аналогичен.

Условия леммы 3.3 влекут условия леммы 3.1 (о погрешности). Поэтому

$$\operatorname{diam} V_+[\bar\beta_m]\varphi_j \le K\delta^\beta, \qquad j = 1, 2.$$

Из условия (A1) следует, что множества $V_+[\bar\beta_m]\varphi_j$ содержат по точке, расстояние между которыми больше $3b$. Следовательно, расстояние между самими множествами не меньше чем $3b - 2K\delta^\beta \ge 2b$. Это доказывает (3.19).

Предложение 3.2. *Описанный выше алгоритм останавливается за конечное число шагов.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда растущая последовательность отрезков $\bar\beta_l$ определяет последовательность ω, исследование которой приведет нас к противоречию. Итак, пусть $\bar\beta_l$ — построенные выше отрезки,

$$\omega = \bigcap_{l \ge n} C_{\bar\beta_l}.$$

Положим

$$\varphi_{jl}^\pm = \bar f_{\pm l}[\omega](\varphi_j), \qquad j = 1, 2,$$
$$\delta_l^\pm = d_{S^1}(\varphi_{1l}^\pm, \varphi_{2l}^\pm).$$

Из определения последовательности ω следует, что $\varphi_{jl}^\pm \in V_\pm[\bar\beta_l](\varphi_j)$. Поэтому

$$\delta_l^\pm - 2K\delta^\beta \le M_{\pm l} \le \delta_l^\pm.$$

Положим еще

$$W_l^\pm = V_\pm[\bar\beta_l](\varphi_1) \cup V_\pm[\bar\beta_l](\varphi_2), \qquad d_l^\pm = \operatorname{diam} W_l^\pm.$$

Предложение 3.3. *Существует такое m, что $\delta_m^\pm > \frac{1}{16}$.*

Предложение 3.2 следует из предложения 3.3, поскольку для такого m $M_{\pm m} > 3b$; алгоритм останавливается — противоречие. Исследуем только последовательности δ_m^+; последовательности с минусом исследуются аналогично.

Доказательство предложения 3.3. Пусть s — то же, что и в (2.4). Отображение $f_{\sigma^l\omega}$ при $\omega_l = 0$ переводит каждую точку φ на дугу $[\varphi + b - \delta, \varphi + b + \delta]$, а каждую дугу длины λ переводит в дугу длины $\lambda' \in ((1-\delta)\lambda, (1+\delta)\lambda)$. Отображение $f_{\sigma^l\omega}$ при $\omega_l = 1$ переводит каждую дугу длины λ, принадлежащую W^+, в дугу длины λ': $\lambda' \in ((a-\delta)\lambda, (a+\delta)\lambda)$. Отметим, что если $\omega_l = 1$, то по построению обе точки φ_{1l}^+, φ_{2l}^+ лежат на W^+.

Отсюда следует, что если $\delta_l < \frac{1}{8}$ (т.е. половины длины дуги W^+), то в последовательности ω после ω_l не может стоять s нулей подряд. Действительно, применение s отображений, δ-близких к повороту на b, к меньшей из дуг $(\varphi_{1l}^+, \varphi_{2l}^+)$ переводит ее на дугу W^+ менее чем за s шагов, после чего соответствующий элемент последовательности ω должен быть единицей, а не нулем. Следовательно,

$$\delta_{l+s}^+ > (a-\delta)(1-\delta)^s \delta_l^+ \qquad \text{при } \ \delta_l^+ < \frac{1}{8}. \tag{3.20}$$

Значит, в последовательности (δ_n^+) должен быть элемент $\delta_n^+ \geq \frac{1}{8}$. Докажем, что

$$\delta_k^+ > \frac{1}{16} \qquad \text{для всех } \ k > n. \tag{3.21}$$

Предположим противное. Пусть существует $\delta_k^+ \leq \frac{1}{16}$, $k > n$. Пусть δ_t^+ — последний элемент последовательности между δ_n^+ и δ_k^+, не меньший $\frac{1}{8}$. Тогда $k - t < s + 1$ в силу (3.20):

$$\delta_{t+s+1}^+ > (a-\delta)(1-\delta)^s \delta_{t+1} \geq (a-\delta)(1-\delta)^{s+1}\delta_t > \frac{1}{8}.$$

Предположение $k - t \geq s + 1$ противоречит выбору δ_t^+. По тем же соображениям среди элементов δ_l^+, $t + 1 \leq l \leq k$, нет 1. Но тогда $\delta_k \geq (1-\delta)^{s+2}\frac{1}{8} > \frac{1}{16}$ — противоречие. Неравенство (3.21) доказано. Аналогично существует такое n', что $\delta_k^- > \frac{1}{16}$ для всех $k > n'$. Это доказывает предложение 3.3, а с ним и лемму 3.3.

3.4. Искажение дуг. Для мягкой системы отображение $\bar f_m[\omega]$ не определяется конечным набором элементов $\omega_0 \ldots \omega_{m-1}$ последовательности $\omega \in \Sigma^2$, как это было в случае ступенчатых систем, а зависит от всей последовательности ω. Поэтому, несмотря на сходство формулировок, утверждение леммы 3.4 сильнее, чем леммы 2.1.

Лемма 3.4 (аналог леммы 2.1). *Пусть заданы отрезок* $\bar\alpha = \alpha_{-n} \ldots \alpha_{-1}\alpha_0 \ldots \alpha_{n-1}$ *(из 0 и 1) и дуга* $J \subset S^1$. *Тогда найдутся такие отрезки* $\bar\beta = \beta_{-m} \ldots \beta_0 \ldots \beta_{m-1}$, $\bar\beta' = \beta'_{-m'} \ldots \beta'_0 \ldots \beta'_{m'-1}$ *и* $\bar\beta'' = \beta''_{-m''} \ldots \beta''_0 \ldots \beta''_{m''-1}$ *из 0 и 1, что* $\beta_i = \beta'_i = \beta''_i = \alpha_i$ *при* $-n \leq i \leq n-1$ *и выполнено следующее*:

1) *если* $\omega \in C_{\bar\beta}$, *то* $\bar f_m[\omega](J) \subset W^- \subset \bar f_{-m}[\omega](J)$, *причем*

$$\big|(\bar f_m[\omega])'|_J\big| < 1, \qquad \big|(\bar f_{-m}[\omega])'|_{(\bar f_{-m}[\omega])^{-1}(W^-)}\big| > 1;$$

2) *если* $\omega' \in C_{\bar\beta'}$, *то* $\bar f_{-m'}[\omega'](J) \subset W^+ \subset \bar f_{m'}[\omega'](J)$, *причем*

$$\big|(\bar f_{-m'}[\omega'])'|_J\big| < 1, \qquad \big|(\bar f_{m'}[\omega'])'|_{(\bar f_{m'}[\omega'])^{-1}(W^+)}\big| > 1;$$

3) *если* $\omega'' \in C_{\bar\beta''}$, *то* $S^1 - W^- \subset \bar f_{m''}[\omega''](J)$, $\ S^1 - W^+ \subset \bar f_{-m''}[\omega''](J)$.

Доказательство. Построим отрезок $\bar\beta$, удовлетворяющий свойству 1). Пусть s — то же, что и в (2.4). Обозначим концы дуги J через φ_1 и φ_2. По лемме 3.3 о разделении найдется такой отрезок $\bar\beta_1 = \beta_{-k_1} \ldots \beta_0 \ldots \beta_{k_1-1}$, $\Gamma_{k_1} \subset \Gamma_n$, что расстояние между множествами $V_{k_1}(\varphi_1)$ и $V_{k_1}(\varphi_2)$, а также между множествами $V_{-k_1}(\varphi_1)$ и $V_{-k_1}(\varphi_2)$ не меньше $2b$.

При $l \geq k_1$ обозначим через X_{-l} интервал между $V_{-l}(\varphi_1)$ и $V_{-l}(\varphi_2)$, содержащийся в образах дуги J под действием $\bar f_{-l}[\omega]$, $\omega \in \Gamma_l$ (т.е. $X_{-l} = \bigcap_{\omega\in\Gamma_l} \bar f_{-l}[\omega](J)$), а через Y_l интервал между $V_l(\varphi_1)$ и $V_l(\varphi_2)$, содержащийся в образах дуги $S^1 - \bar J$ под действием $\bar f_l[\omega]$.

Построим такой отрезок $\bar\beta_2 = \beta_{-k_2} \ldots \beta_0 \ldots \beta_{k_2-1}$, $\Gamma_{k_2} \subset \Gamma_{k_1}$, что $Q \subset Y_{k_2}$ и $P \subset X_{-k_2}$. Для этого рассмотрим следующую процедуру индуктивного построения множеств Γ_l.

Множество Γ_{k_1} задано.

Предположим, что построено множество Γ_l. Проверим выполнение следующих условий:

$$Q \subset Y_l, \qquad \text{(C1)} \qquad\qquad P \subset X_{-l}. \qquad \text{(C2)}$$

Если оба условия выполнены, то построение закончено, иначе определим β_l и β_{-l-1} следующим образом. Если условие (C1) выполнено, то положим $\beta_l = 1$, иначе $\beta_l = 0$. Если условие (C2) выполнено, то положим $\beta_{-l-1} = 1$, иначе $\beta_{-l-1} = 0$. Повторяем процедуру построения, увеличив l на единицу.

Покажем, что это построение закончится на конечном шаге.

Предложение 3.4. *Если условие* (C1) *или* (C2) *оказалось выполненным на некотором шаге, то оно будет оставаться выполненным до окончания построения.*

Доказательство. Если $Q \subset Y_l$ и построение не закончено, то $\beta_l = 1$ и для любого $\omega \in \Gamma_{l+1}$ отображение $f_{\sigma^l\omega}$ есть отображение Морса–Смейла с репеллером, лежащим на дуге Y_l и, следовательно, на дуге $\bar{f}_l[\omega](S^1 - \bar{J})$. Но тогда $\bar{f}_l[\omega](S^1 - \bar{J}) \subset f_{\sigma^l\omega} \circ \bar{f}_l[\omega](S^1 - \bar{J}) = \bar{f}_{l+1}[\omega](S^1 - \bar{J})$. Поскольку это выполнено для любого $\omega \in \Gamma_{l+1}$, а $Y_l = \bigcap_{\omega\in\Gamma_l} \bar{f}_l[\omega](S^1 - \bar{J})$, то $Y_l \subset Y_{l+1}$. Но тогда $Q \subset Y_l \subset Y_{l+1}$ и условие (C1) продолжает выполняться. Аналогично для условия (C2).

Предложение 3.5. *Каждое из условий* (C1) *и* (C2) *окажется выполненным на некотором шаге нашего построения.*

Доказательство. Предположим от противного, что условие (C1) никогда не окажется выполненным. Тогда процедура построения никогда не закончится и тем самым определит некоторую последовательность $\omega \in C_{\beta_1}$, причем $\omega_l = 0$ при $l \geq k_1$. Тогда отображения $\bar{f}_l[\omega]$ близки к повороту на b при $l > k_1$. При этом поскольку k_1 было выбрано так, что расстояние между $V_{k_1}(\varphi_1)$ и $V_{k_1}(\varphi_2)$ не меньше $2b$, то $|\bar{f}_{k_1}[\omega](S^1 - \bar{J})| \geq 2b$. Но тогда одна из дуг $\bar{f}_{k_1}[\omega](S^1 - \bar{J}), \dots, \bar{f}_{k_1+s}[\omega](S^1 - \bar{J})$ целиком накроет множество Q, причем так, что расстояние от Q до ее концов будет больше γ. Пусть это дуга $\bar{f}_{k_1+t}[\omega](S^1 - \bar{J})$. Множества $V_{k_1+t}(\varphi_1)$ и $V_{k_1+t}(\varphi_2)$ находятся в γ-окрестностях концов этой дуги по лемме 3.1 о погрешности. Поэтому $Q \subset Y_{k_1+t}$, т.е. условие (C1) окажется выполненным. Получили противоречие, что доказывает предложение 3.5 для условия (C1). Для условия (C2) предложение доказывается аналогично.

Из предложений 3.4 и 3.5 следует, что индуктивное построение закончится на некотором шаге k_2; при этом будет построен отрезок $\bar{\beta}_2 = \beta_{-k_2} \dots \beta_0 \dots \beta_{k_2-1}$, для которого выполнены условия (C1) и (C2) при $l = k_2$.

Далее, найдется такой отрезок $\bar{\beta}_3$, $C_{\bar{\beta}_3} \subset C_{\bar{\beta}_2}$, что для любого $\omega \in C_{\bar{\beta}_3}$ выполнены включения $\bar{f}_{k_3}[\omega](J) \subset W^- \subset \bar{f}_{-k_3}[\omega](J)$. Действительно, рассмотрим последовательность $\omega^* \in C_{\bar{\beta}_2}$, которая получается из отрезка $\bar{\beta}_2$ приписыванием бесконечного числа единиц с обеих сторон. Поскольку $\omega^* \in C_{\bar{\beta}_2}$, то $Q \subset \bar{f}_{k_2}[\omega^*](S^1 - \bar{J})$, $P \subset \bar{f}_{-k_2}[\omega^*](J)$. Но тогда для некоторого $k_3 \geq k_2$ будут выполнены включения $\bar{f}_{k_3}[\omega^*](J) \subset W^- \subset \bar{f}_{-k_3}[\omega^*](J)$, причем можно считать, что концы дуги W^- отстоят от концов дуг $\bar{f}_{k_3}[\omega^*](J)$ и $\bar{f}_{-k_3}[\omega^*](J)$ больше чем на γ. Но тогда по лемме 3.1 о погрешности для любого $\omega \in C_{\bar{\beta}_3}$, где $\bar{\beta}_3$ есть отрезок $\bar{\beta}_2$ с дописанными к нему $(k_3 - k_2)$ единицами справа и слева, будут выполнены включения $\bar{f}_{k_3}[\omega](J) \subset W^- \subset \bar{f}_{-k_3}[\omega](J)$. И, наконец, при необходимости дописывая к $\bar{\beta}_3$ справа и слева еще некоторое количество единиц, построим отрезок $\bar{\beta}$, для которого будут выполнены еще и условия на производные ($|\bar{f}'_m[\omega]|_J| < 1$, $|\bar{f}'_{-m}[\omega]|_{\bar{f}^{-1}_{-m}(W^-)}| > 1$). Действительно, это прямо следует из того, что любое отображение f_ω^{-1}

при $\omega_0 = 1$ на дуге W^+ сжимает, а любое отображение f_ω при $\omega_0 = 1$ на дуге W^+ растягивает, причем коэффициенты сжатия и растяжения (равномерно по ω) отделены от 1.

Отрезки $\bar{\beta}'$ и $\bar{\beta}''$ строятся аналогично.

3.5. Периодические орбиты. Доказательство свойства (i) в теореме 2 дословно повторяет доказательство свойства (i) в теореме 1 (п. 2.3) (вместо леммы 2.1 надо воспользоваться леммой 3.4).

3.6. Отрезки плотности.

Лемма 3.5 (аналог леммы 2.2). *Пусть заданы отрезок $\bar{\alpha} = \alpha_{-n} \dots \alpha_{-1}\alpha_0 \dots \alpha_{n-1}$ (из 0 и 1) и дуга $J \subset S^1$. Найдется такой конечный отрезок $\bar{\gamma} = \gamma_0\gamma_1 \dots \gamma_l$ из 0 и 1, что если последовательность $\omega \in \Sigma^2$ содержит отрезок $\bar{\gamma}$, то для любой точки $\varphi \in S^1$ орбита точки $(\omega, \varphi) \in \Sigma^2 \times S^1$ под действием отображения G пересекает множество $C_{\bar{\alpha}} \times J \subset \Sigma^2 \times S^1$.*

Доказательство леммы 3.5 дословно повторяет доказательство леммы 2.2 (вместо леммы 2.1 надо воспользоваться леммой 3.4).

3.7. Показатели Ляпунова. Так же как в п. 2.5, если заданы точка $\varphi \in S^1$ и последовательность $\omega \in \Sigma^2$, то при $n \in \mathbb{N}$ положим

$$\lambda_n(\varphi) = \ln|\bar{f}_n'(\varphi)| = \sum_{i=0}^{n-1} \ln|f_{\omega_i}'(\bar{f}_i(\varphi))|, \qquad \lambda_{-n}(\varphi) = \ln|\bar{f}_{-n}'(\varphi)| = -\sum_{i=0}^{n-1} \ln|f_{\omega_{-i}}'(\bar{f}_{-i}(\varphi))|.$$

Если нам будет нужно подчеркнуть зависимость $\lambda_{\pm n}(\varphi)$ от ω, будем писать $\lambda_{\pm n}[\omega](\varphi)$.

Лемма 3.6 (аналог леммы 2.3). *Существует такая константа $C > 0$, что выполнено следующее. Для любого отрезка $\bar{\alpha} = \alpha_{-n} \dots \alpha_0 \dots \alpha_{n-1}$, любой точки $\varphi \in S^1$ и любого $\lambda \in I$ найдется такая последовательность $\omega(\varphi) \in C_{\bar{\alpha}}$, что для любого $k \geq n$ выполнены неравенства $|\lambda_k(\varphi) - \lambda_n(\varphi) - (k-n)\lambda| < C$, $|\lambda_{-k}(\varphi) - \lambda_{-n}(\varphi) + (k-n)\lambda| < C$.*

Доказательство. Обозначим для удобства

$$\nu_{k,n}[\omega] = \lambda_k[\omega](\varphi) - \lambda_n[\omega](\varphi) - (k-n)\lambda, \qquad \nu_{-k,-n}[\omega] = \lambda_{-k}[\omega](\varphi) - \lambda_{-n}[\omega](\varphi) + (k-n)\lambda.$$

Последовательность $\bar{\beta}_k = \beta_{-k} \dots \beta_{k-1}$ будем строить индуктивно, полагая $k \geq n$, $\bar{\beta}_n = \bar{\alpha}$ и дописывая на каждом шаге к отрезку $\bar{\beta}_k$ по одному знаку с каждой стороны. Как обычно, обозначим $\Gamma_k = C_{\bar{\beta}_k}$. Задано $\Gamma_n = C_{\bar{\alpha}}$. Предположим, что построено Γ_k.

Если для некоторого $\omega^* \in \Gamma_k$ выполнено неравенство $\nu_{k,n}[\omega^*] > 0$, то положим $\omega_k = 1$, если $V_k(\varphi) \subset W^-$, и $\omega_k = 0$ в противном случае.

Если для всех последовательностей из Γ_k выполнено неравенство $\nu_{k,n} \leq 0$, то положим $\omega_k = 1$, если $V_k(\varphi) \subset W^+$, и $\omega_k = 0$ в противном случае.

Если для некоторого $\omega^* \in \Gamma_k$ выполнено неравенство $\nu_{-k,-n}[\omega^*] > 0$, то положим $\omega_{-k-1} = 1$, если $V_{-k}(\varphi) \subset W^+$, и $\omega_{-k-1} = 0$ в противном случае.

Если для всех последовательностей из Γ_k выполнено неравенство $\nu_{-k,-n} \leq 0$, то положим $\omega_{-k-1} = 1$, если $V_{-k}(\varphi) \subset W^-$, и $\omega_{-k-1} = 0$ в противном случае.

Построено множество Γ_{k+1}. Повторяем процедуру построения, увеличив k на единицу.

Покажем, что для полученной в результате этого построения последовательности $\omega(\varphi)$ величина $|\nu_{k,n}|$ не будет превосходить $C = 2s(\ln L + |I|)$, где отрезок I — тот же, что и в (2.4). (Неравенство $|\nu_{-k,-n}| < C$ проверяется аналогично.) Заметим, что

$$|\nu_{k+1,n} - \nu_{k,n}| < (\ln L + |I|). \tag{3.22}$$

Предложение 3.6. *Если* $|\nu_{k,n}| \geq s(\ln L + |I|)$, *то* $|\nu_{k+s,n}| < |\nu_{k,n}|$.

Доказательство. Пусть $\nu_{k,n} \geq s(\ln L + |I|)$ (случай $\nu_{k,n} \leq -s(\ln L + |I|)$ рассматривается аналогично). Тогда из (3.22) следует, что $\nu_{k+l} > 0$ для любого l: $0 < l \leq s$.

Среди элементов $\omega_k, \omega_{k+1}, \ldots, \omega_{k+s-1}$ обязательно найдется хотя бы одна 1. Действительно, если все они равны 0, то отображения $f_{\sigma^{k-1}\omega}, f_{\sigma^k\omega}, \ldots, f_{\sigma^{k+s-2}\omega}$ близки к повороту на b. Тогда найдется такое $t < s$, что точка $\bar{f}_{k+t}[\omega](\varphi)$ лежит на дуге W^- и отстоит от ее концов не меньше чем на γ. Но тогда $V_{k+t}(\varphi) \subset W^-$. Заметим также, что по лемме 3.2 о погрешности для показателей Ляпунова значения $\lambda_{k+t}[\omega](\varphi)$ и $\lambda_{k+t}[\omega'](\varphi)$ при $\omega, \omega' \in \Gamma_k$ мало различаются, поэтому величины $\nu_{k+t}[\omega]$ и $\nu_{k+t}[\omega']$ для любого $\omega' \in \Gamma_k$ имеют одинаковый знак. Следовательно, по нашему алгоритму мы должны выбрать $\omega_{k+t} = 1$. Противоречие. Оставшаяся часть доказательства предложения параллельна соответствующей части доказательства предложения 2.2.

Из предложения 3.6 и (3.22) теперь следует лемма 3.6 точно так же, как из предложения 2.2 и (2.5) следовала лемма 2.3.

Доказательство свойства (ii) в теореме 2 теперь может быть получено с помощью очевидных модификаций из доказательства свойства (ii) в теореме 1 (п. 2.5). А именно вместо леммы 2.2 нужно воспользоваться леммой 3.5, а вместо леммы 2.3 использовать лемму 3.6. При этом построение искомой последовательности нужно проводить индуктивно одновременно в обе стороны; лемма 3.2 о погрешности для ляпуновских показателей позволяет без существенных изменений использовать доказательство того, что построенная последовательность обладает нужными свойствами.

3.8. Плотность. Свойство (iii) в теореме 2 непосредственно следует из леммы 3.5 так же, как в случае ступенчатых систем свойство (iii) в теореме 1 следовало из леммы 2.2.

4. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ТОЧКИ МЯГКИХ КОСЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ НАД СОЛЕНОИДОМ

В этом разделе строятся плотные множества периодических точек разных индексов для косых произведений над соленоидом. Начнем с гладкого случая.

4.1. Гладкие косые произведения над соленоидом и их возмущения. Пусть T — полноторие: $T = S^1 \times D$, $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\}$. Обозначим через S отображение соленоида

$$S\colon\ T \to T, \quad (s, z) \mapsto \left(2s, \frac{1}{3}z + \exp 2\pi i s\right).$$

Максимальный аттрактор этого отображения и есть соленоид Смейла–Вильямса; обозначим его через Λ.

Рассмотрим теперь гладкое косое произведение над полноторием с отображением соленоида в базе

$$H\colon\ T \times S^1 \to T \times S^1, \quad (x, \varphi) \mapsto (S(x), f_x(\varphi)), \qquad x \in T, \quad \varphi \in S^1. \tag{4.1}$$

Максимальный аттрактор отображения H

$$\Delta = \bigcap_{k \geq 0} H^k(T \times S^1)$$

имеет вид $\Delta = \Lambda \times S^1$. Ограничение $G = H|_\Delta$ — это косое произведение над соленоидом:

$$G\colon\ \Lambda \times S^1 \to \Lambda \times S^1, \quad (x, \varphi) \mapsto (S(x), f_x(\varphi)), \qquad x \in \Lambda, \quad \varphi \in S^1.$$

Опишем результаты о гладких возмущениях диффеоморфизма H и сходных с ним косых произведений, полученные первым автором. Они относятся к гиперболической теории и будут предметом следующей статьи. Здесь эти результаты приводятся, чтобы мотивировать ограничения, налагаемые на изучаемые ниже косые произведения.

Малое гладкое возмущение $\mathcal{H}$ диффеоморфизма H (см. (4.1)) при определенных ограничениях на производные отображений f_x по x и φ имеет максимальный аттрактор $\Delta_{\mathcal{H}}$, гомеоморфный Δ. Гомеоморфизм $h\colon \Delta \to \Delta_{\mathcal{H}}$ может быть выбран так, что

h сохраняет координату φ;

h сопрягает ограничение $\mathcal{H}|_{\Delta_{\mathcal{H}}}$ с отображением

$$\tilde{G}\colon\ \Lambda \times S^1 \to \Lambda \times S^1, \quad (x, \varphi) \mapsto (S(x), \tilde{f}_x(\varphi)), \qquad x \in \Lambda, \quad \varphi \in S^1. \tag{4.2}$$

Эти факты относятся к известным результатам гиперболической теории. Новым является тот факт, что отображение $\tilde{f}_x$ *гёльдеровым образом зависит от* x. Это объясняется следующим.

Образ слоя $\{x\} \times S^1$ под действием гомеоморфизма h является вложенной окружностью и может быть задан как график отображения

$$\varphi_x\colon\ S^1 \to T, \quad \varphi \mapsto (\psi_x(\varphi), \varphi).$$

Оказывается, *отображение* ψ_x *гёльдеровым образом зависит от* x *как элемент пространства* C^1 *и имеет равномерно ограниченные по* $x \in \Lambda$ *вторые производные.* В частности, существуют такие положительные C_1 и α_1, что

$$d_{C^1(S^1,T)}(\psi_x, \psi_y) \le C_1 (d_T(x,y))^{\alpha_1}, \qquad x, y \in \Lambda.$$

Пусть $\pi\colon \Delta = \Lambda \times S^1 \to S^1$ — проектирование на слой вдоль базы Λ. Тогда

$$\tilde{f}_x(\varphi) = \pi \circ \mathcal{H}(\psi_x(\varphi), \varphi).$$

Из гладкости отображения $\mathcal{H}$ следует теперь

$$d_{C^1(S^1,S^1)}(\tilde{f}_x, \tilde{f}_y) \le C_2 (d_T(x,y))^{\alpha_1}, \quad x, y \in \Lambda; \qquad |D^2_\varphi f_x| < C_3. \tag{4.3}$$

4.2. Периодические точки разных индексов: основной результат. Рассмотрим пространство $\mathcal{G}$ отображений (4.2), удовлетворяющих ограничению (4.3), с общими для всех отображений константами C_2, C_3, α. Введем на нем метрику

$$d(G, \tilde{G}) = \max_{x \in \Lambda} d_{C^1(S^1,S^1)}(f_x, \tilde{f}_x).$$

Так определенное пространство зависит от выбора C_2, C_3, α, но формулируемые ниже результаты не зависят.

Теорема 3. *В пространстве* $\mathcal{G}$ *отображений* (4.2) *с введенной выше метрикой существует такое открытое множество, что для всех отображений из этого множества периодические орбиты с мультипликатором по окружности, большим единицы, плотны в* $\Lambda \times S^1$. *То же выполнено для периодических орбит с мультипликатором по окружности, меньшим единицы.*

Эта теорема доказывается в остальной части раздела.

4.3. Почти ступенчатые косые произведения над соленоидом и их возмущения. Пусть g_1 — то же отображение, что и в п. 2.1. Обозначим через g_2 поворот $x \to x+b$. Константы $\ln a$ и b выбираются настолько малыми, насколько это понадобится в дальнейшем. Рассмотрим отображение G^0 вида (4.2), в котором

$$\begin{aligned} \tilde{f}_x &= g_1 && \text{при } \ x=(s,z)\in\Lambda_1 := \left\{(s,z)\in\Lambda \;\Big|\; \frac{5}{8}\le s<1\right\}, \\ \tilde{f}_x &= g_0 = g_1^{-1}\circ g_2 && \text{при } \ x=(s,z)\in\Lambda_0 := \left\{(s,z)\in\Lambda \;\Big|\; \frac{1}{8}\le s<\frac{1}{2}\right\}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Предположим, что при остальных $x\in T$ отображение $\tilde{f}_x$ гладко зависит от x, причем $|D\tilde{f}_x|\le a$, $|D\tilde{f}_x^{-1}|\le a$.

Так построенное отображение G^0 (в выборе которого остается большой произвол; мы фиксируем одно такое отображение) называется "почти ступенчатым". Невозможно модифицировать его так, чтобы отображение $\tilde{f}_x$ совпадало бы либо с g_1, либо с g_0 на всем соленоиде: отображение $\tilde{f}_x$ непрерывно зависит от x, а соленоид связен. С этим связана дополнительная трудность при изучении косых произведений над соленоидом.

Открытое множество, о котором говорится в теореме 3, может быть выбрано в виде

$$\mathcal{U} = \{G\in\mathcal{G} \mid d_{C^2}(G,G^0)\le\lambda\},$$

где λ, малое по сравнению с $\ln a$ и b, выбирается ниже. Именно для таких отображений G и будут найдены плотные множества периодических точек, притягивающих и отталкивающих на слое.

Замечание. Отображение G^0 можно выбрать так, чтобы оно гладко продолжалось до отображения H вида (4.1), удовлетворяющего требованию (4.3). Если константы $\ln a$ и b достаточно малы, то отображение H можно построить так, что его малые возмущения будут иметь инвариантные множества, описанные в п. 4.1. Показатель Гёльдера в неравенстве (4.3) растет с убыванием $\ln a$ и b. Ограничения возмущенных отображений на их аттракторы будут отображениями из множества $\mathcal{U}$. Тем самым доказательство теоремы 3 для этого множества дает информацию о грубых свойствах аттракторов гладких отображений. Другими методами эти свойства были получены в [4].

4.4. "Соленоидальные" косые произведения над сдвигом Бернулли. Как известно, отображение соленоида полусопряжено со сдвигом Бернулли. А именно обозначим через Σ_0^2 множество всех последовательностей из Σ^2, в которых 0 встречается правее любого элемента. Существует гёльдерово взаимно однозначное отображение $\Psi\colon \Sigma_0^2\to\Lambda$ такое, что $S\circ\Psi=\Psi\circ\sigma$. Отображение Ψ обратно "отображению судьбы" $\Phi\colon\Lambda\to\Sigma_0^2$ (которое не является гёльдеровым!):

$$\Phi(x)=\omega, \qquad \omega_n=j \quad \text{при } \ S^n(x)\in\left\{\frac{j}{2}\le s(x)<\frac{j}{2}+\frac{1}{2}\right\}.$$

Положим $\Phi(\Lambda_j)=\Omega_j$, где

$$\Omega_0=\{\omega\in\Sigma_0^2 \mid 001\le\omega_0\omega_1\omega_2\le 011\}, \qquad \Omega_1=\{\omega\in\Sigma_0^2 \mid 101\le\omega_0\omega_1\omega_2\le 111\} \tag{4.5}$$

(упорядочение лексикографическое).

Обозначим через $\mathcal{W}$ класс отображений

$$F\colon\ \Sigma_0^2\times S^1\to\Sigma_0^2\times S^1, \qquad F(\omega,\varphi)=(\sigma\omega, f_\omega(\varphi)), \quad \omega\in\Sigma_0^2, \quad \varphi\in S^1, \tag{4.6}$$

в которые перейдут отображения класса $\mathcal{U}$ при отображении $(\omega,\varphi)\to(\Psi(\omega),\varphi)$. Если отображение $\tilde G\in\mathcal{U}$ имеет вид (4.2), то соответствующее отображение F имеет вид (4.6), причем

$$f_\omega=\tilde f_x, \qquad \text{где} \ \ x=\Psi(\omega).$$

Отсюда получаем

$$d_{C^1}(f_\omega,f_{\omega'})\le C(d_{\Sigma^2}(\omega,\omega'))^\alpha, \qquad |D^2_\varphi f_\omega|<C \tag{4.7}$$

для некоторых положительных C, α,

$$d_{C^1}(f_\omega,g_j)\le\lambda \qquad \text{при} \ \ \omega\in\Omega_j. \tag{4.8}$$

Пусть теперь по аналогии с (3.3)

$$L=\max_\Lambda\bigl(\|Df_\omega(\varphi)\|,\|Df_\omega^{-1}(\varphi)\|\bigr). \tag{4.9}$$

Выбирая $\ln a$ и b достаточно малыми, можно добиться того, чтобы все отображения $\tilde f_x$ для G^0, а значит и для всех $\tilde G\in\mathcal{U}$, были C^1-близки к тождественному. А именно, L в (4.9) будет настолько близко к 1, что

$$L\cdot 2^{-\alpha}<1, \tag{4.10}$$

где α — показатель Гёльдера из неравенства (4.7). Фиксируем δ, малое по сравнению с $\ln a$ и b; требования на малость δ налагаются ниже. Число λ в определении множества $\mathcal{U}$ можно выбрать столь малым по сравнению с δ, чтобы отображения f_ω удовлетворяли следующему требованию:

$$d_{C^1}(f_\omega\circ f_{\omega'},g_2)\le\delta \qquad \text{при} \quad \omega\in\Omega_1, \quad \omega'\in\Omega_0. \tag{4.11}$$

Замечание. Из (4.8) при $\lambda\ll\delta$ следует, что

$$d_{C^1}(f_\omega,f_{\omega'})<\delta \qquad \text{при} \quad (\omega,\omega')\in\Omega_0\times\Omega_0\cup\Omega_1\times\Omega_1. \tag{4.12}$$

Это ослабление неравенства (4.8) будет иногда использоваться вместо него.

Мы можем теперь сформулировать усиление теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть отображение* (4.6) *удовлетворяет условиям* (4.7)–(4.11). *Тогда оно имеет плотное множество периодических точек с мультипликатором вдоль окружности, большим* 1. *То же выполнено для периодических точек с мультипликатором, меньшим* 1.

Теорема 4 сильнее теоремы 3, поскольку класс рассмотренных в ней отображений шире, чем множество отображений, индуцированных из класса $\mathcal{U}$. Доказательству этой теоремы посвящены п. 4.5–4.8.

4.5. Вторая лемма о разбегании.

Определение 4.1. Назовем отрезок последовательности $\bar\beta=\beta_{-n}\dots\beta_{n-1}$ *ручным*, если $\beta_{n-1}=1$ и достаточно далеко от нулевой позиции не встречается двух нулей подряд; точнее,

$$\beta_i\beta_{i+1}\ne 00 \qquad \text{при} \quad i>\frac{n}{2}, \quad i+1<-\frac{n}{2}.$$

Для любого отрезка $\bar\beta=\beta_{-m}\dots\beta_{m-1}$ положим

$$\Gamma_{\bar\beta}=C_{\bar\beta01}\cup C_{\bar\beta10}\cup C_{\bar\beta11}, \tag{4.13}$$

где

$$\bar\beta ij=\beta_{-m}\dots\beta_{m-1}ij.$$

Эквивалентное определение. Отрезок $\bar\beta = \beta_{-m}\dots\beta_{m-1}$ ручной, если для любой последовательности $\omega \in \Gamma_{\bar\beta}$

$$\sigma^i\omega \in \Omega_{\omega_i} \qquad \text{при} \quad i > \frac{n}{2}, \quad i < -\frac{n}{2},$$

где Ω_j определены в (4.5).

Для ручного отрезка $\bar\beta$ и любой последовательности $\omega \in \Gamma_{\bar\beta}$ отображения $f_{\sigma^i\omega}$ при $i > \frac{n}{2}$, $i < -\frac{n}{2}$ хорошо контролируются: они близки к отображениям g_{ω_i}. При $|i| < \frac{n}{2}$ отображения $f_{\sigma^i\omega}$ практически неизвестны. Но для любых двух последовательностей $\omega, \omega' \in \Gamma_{\bar\beta}$ последовательности $\sigma^i\omega$, $\sigma^i\omega'$ при $|i| < \frac{n}{2}$ близки. Поэтому близки отображения $f_{\sigma^i\omega}$, $f_{\sigma^i\omega'}$. Следовательно, как и для систем над подковой, вклады этих отображений в суперпозиции $\bar f_{\pm m}[\omega]$ и $\bar f_{\pm m}[\omega']$ отличаются столь мало, что этим различием можно в определенном смысле пренебречь.

Эти соображения формализованы в следующих трех леммах, из которых первая является основной.

Лемма 4.1. *Рассмотрим отображение* (4.6), *удовлетворяющее условиям* (4.7), (4.9), (4.10), (4.12). *Пусть* $\bar\beta = \beta_{-m}\dots\beta_{m-1}$ *— ручной отрезок, причем* $m > m_0(\alpha, L, C)$. *Тогда для любых двух последовательностей* $\omega, \omega' \in \Gamma_{\bar\beta}$ *выполняется неравенство*

$$d_{C^0}(\bar f_{\pm m}[\omega], \bar f_{\pm m}[\omega']) \le K\delta^\beta.$$

Здесь $\beta = 1 - \frac{\ln L}{\ln 2^\alpha}$, $K = K(\alpha, L, C)$ *— константа, не зависящая от* δ.

Доказательство. Рассмотрим оценку для $\bar f_m$. Оценка для $\bar f_{-m}$ доказывается аналогично, только проще. Лемма доказывается по тому же плану (почти дословно), как и лемма 3.1. Дополнительная трудность состоит в том, что соотношение (3.2), выражающее близость системы к ступенчатой, заменяется более слабым неравенством (4.8).

Отметим, что неравенство (3.6) следует из принадлежности $\omega, \omega' \in \Gamma_{\bar\beta}$.

Шаг 1 из доказательства леммы 3.1 повторяется теперь дословно, поскольку требования (3.3), (3.4), (3.5) совпадают с (4.9), (4.7), (4.10).

Шаг 2. Пусть, как и в доказательстве леммы 3.1,

$$\delta_l = d_{C^0}(\bar f_m[\omega], \bar f_m[\omega']),$$

$\omega, \omega' \in \Gamma_{\bar\beta}$. Чтобы оценивать члены последовательности δ_i при $i > k$, воспользуемся тем, что отрезок $\bar\beta$ ручной, а m велико.

Отображения $f = f_{\sigma^i\omega}$ и $g = f_{\sigma^i\omega'}$ играют роль f и g в неравенстве (3.9). Выберем m столь большим, чтобы неравенство

$$\delta \le C \cdot 2^{(-m+k+1)\alpha}$$

влекло $k > m/2$. Для этого достаточно взять

$$m > 2\frac{\ln C - \ln\delta}{\alpha\ln 2} + 2.$$

Из определения ручного отрезка следует теперь, что f и g принадлежат одновременно либо Ω_0, либо Ω_1. Неравенство (3.9) при $i > k$ следует теперь из (4.12). Дальнейшее доказательство леммы 4.1 дословно повторяет теперь шаг 2 доказательства леммы 3.1.

4.6. Вторая лемма о разделении точек. Пусть $\Gamma_{\bar\beta}$ — множество последовательностей, задаваемое формулой (4.13). Положим

$$V_{\pm m}[\bar\beta](\varphi) = \{\bar f_{\pm m}[\omega](\varphi) \mid \omega \in \Gamma_{\bar\beta}\}. \tag{4.14}$$

Лемма 4.2. *Рассмотрим отображение* (4.1), *удовлетворяющее условиям* (4.7)–(4.12). *Пусть δ мало по сравнению с $\ln a$ и b. Требования малости на δ налагаются ниже. Пусть $\bar\alpha$ — произвольный отрезок, $\varphi_1, \varphi_2 \in S^1$ — произвольные точки. Тогда существует такой отрезок $\bar\beta = \beta_{-m}\dots\beta_{m-1}$, $C_{\bar\beta} \subset C_{\bar\alpha}$, что*

$$d_{S^1}(V_{\pm m}[\bar\beta](\varphi_1), V_{\pm m}[\bar\beta](\varphi_2)) \geq 2b. \tag{4.15}$$

Допишем отрезок $\bar\alpha$ единицами с обеих сторон так, чтобы новый отрезок стал ручным. Его обозначим через $\bar\beta_n = \beta_{-n}\dots\beta_{n-1}$.

Последовательность $\bar\beta_l$ будем строить индуктивно, начиная с $\bar\beta_n$ и дописывая по два знака с каждой стороны. Точнее, осуществляется следующий алгоритм. Пусть отрезок $\bar\beta_l$ уже построен. Положим

$$\Gamma_l = \Gamma_{\bar\beta_l}, \qquad M_{\pm l} = \min_{\omega\in\Gamma_l} d_{S^1}(\bar f_{\pm l}[\omega](\varphi_1), \bar f_{\pm l}[\omega](\varphi_2)).$$

Шаг 1. Проверим следующие условия:

$$M_l > 3b, \quad \text{(A1)} \qquad\qquad M_{-l} > 3b. \quad \text{(A2)}$$

Если оба условия выполнены, алгоритм останавливается. В противном случае переходим к шагу 2.

Шаг 2. Положим

$$W_{\pm l} = V_{\pm l}[\bar\beta_l](\varphi_1) \cup V_{\pm l}[\bar\beta_l](\varphi_2).$$

Проверим следующие условия:

$$W_l \subset W^+, \quad \text{(B1)} \qquad\qquad W_l \subset W^-. \quad \text{(B2)}$$

Дописывание цифр к отрезку $\bar\beta_l$ производится следующим образом: если условие (B1) выполнено, то $\beta_l = \beta_{l+1} = 1$, иначе $\beta_l = 0$, $\beta_{l+1} = 1$; если условие (B2) выполнено, то $\beta_{-(l+1)} = \beta_{-(l+2)} = 1$, иначе $\beta_{-(l+1)} = 1$, $\beta_{-(l+2)} = 0$.

После этого переходим к шагу 1. Отметим, что на каждом шаге алгоритма ручной отрезок превращается в ручной. Описанный здесь алгоритм останавливается на конечном шаге. Выведем отсюда лемму о разделении.

Если оба условия (A1), (A2) на шаге l выполнены, то в каждом из множеств $V_{\pm l}[\bar\beta_l](\varphi_j)$ можно выбрать по точке так, что расстояние между этими точками будет больше $3b$. С другой стороны, как указывалось выше, отрезок $\bar\beta_l$ ручной. Поэтому к последовательностям $\omega, \omega' \in \Gamma_l$ применима вторая лемма о разбегании. Следовательно, диаметры множеств $V_{\pm l}[\bar\beta_l](\varphi_j)$ малы по сравнению с b. Отсюда следует (4.15).

Заметим теперь, что если отрезок $\bar\beta_l$ кончается символами 01 (соответственно 11), то для любой последовательности $\omega \in \Gamma_l$ отображение $f_{\sigma^{l-1}\omega} f_{\sigma^{l-2}\omega}$ близко к $g_1 \circ g_0 = g_2$ — “почти поворот” (соответственно близко к $g_1 \circ g_1$).

Доказательство остановки описанного алгоритма проводится теперь так же, как в п. 3.3, и мы не приводим его во избежание повторений.

4.7. Еще раз об искажении дуг.

Лемма 4.3. *Для любого отрезка* $\bar{\alpha}$ *и любой дуги* $J \subset S^1$ *существует такой отрезок* $\bar{\beta}$, *продолжающий* α, *что для любой последовательности* $\omega \in \Gamma_{\bar{\beta}}$

$$\bar{f}_m J \subset W^- \subset \bar{f}_{-m} J, \tag{4.16}$$

$$|\bar{f}'_m|_J| < 1, \qquad |\bar{f}'_{-m}|_{\bar{f}^{-1}_{-m} W^-}| > 1, \tag{4.17}$$

где $\bar{f}_{\pm m} = \bar{f}_{\pm m}[\omega]$.

Доказательство почти дословно повторяет доказательство леммы 3.4 с поправками, подобными сделанным в п. 4.6. А именно пусть φ_1, φ_2 — концы дуги J. С использованием леммы 4.2 строится ручной отрезок $\bar{\beta}_{k_1}$, продолжающий α и такой, что для $\bar{\beta} = \bar{\beta}_{k_1}$ выполнено неравенство (4.15).

В алгоритме п. 3.4 дописывание нуля справа или слева заменяется на дописывание 01, а дописывание 1 — на дописывание 11. Все получаемые таким образом отрезки $\bar{\beta}_l$, $l \geq k_1$, будут ручными, а отображения $f_{\sigma^i \omega}$ при $\omega \in \Gamma_l$, $i > k_1$ контролируемыми, т.е. близкими к g_{ω_i}. После этого доказательство леммы 3.4 повторяется практически дословно.

4.8. Доказательство теоремы о периодических точках. Теперь доказательство теоремы 4 повторяет доказательство утверждения (i) теорем 1 и 2 и приводится без подробных деталей. Пусть $C_{\bar{\alpha}} \times J$ — открытое множество из базы топологии в $\Sigma^2_0 \times S^1$. Найдем периодическую точку в $C_{\bar{\alpha}} \times J$, орбита которой устойчива по слою. Применим лемму 4.3 к отрезку $\bar{\alpha}$ и дуге J. Пусть $\bar{\beta}$ — такой отрезок, продолжающий $\bar{\alpha}$, что для любой последовательности $\omega \in \Gamma_{\bar{\beta}}$ выполняются соотношения (4.16), (4.17). Рассмотрим последовательность ω^0, периодическую с периодом $\bar{\beta}$. Тогда $\omega^0 \in \Gamma_{\bar{\beta}}$, поскольку два самых левых знака ij отрезка $\bar{\beta}$, которые в последовательности ω^0 дописываются после самого правого знака того же отрезка, равны 01 или 11. Следовательно, для последовательности ω^0 выполнены соотношения (4.16), (4.17). Поэтому отображение $f = \bar{f}^{-1}_{-m} \circ \bar{f}_m$ имеет неподвижную точку $y \in J$, причем $f'(y) < 1$; здесь $\bar{f}_{\pm m} = \bar{f}_{\pm m}[\omega^0]$. Точка (ω^0, y) искомая периодическая для отображения (4.1). Теорема 4, а с ней теорема 3 доказаны.

Аналоги утверждений (ii), (iii) теоремы 2 также справедливы для косых произведений над соленоидом, но мы не включаем сюда их подробное изложение.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Городецкий А.С., Ильяшенко Ю.С.* Некоторые новые грубые свойства инвариантных множеств и аттракторов динамических систем // Функц. анализ и его прил. 1999. Т. 33, № 2. С. 16–30.
2. *Hirsh M., Pugh C., Shub M.* Invariant manifolds. N.Y. etc.: Springer-Verl., 1977. (Lect. Notes Math.; V. 583).
3. *Kostelich E.J., Kan Ittai, Grebogi C., Ott E., Yorke J.* Unstable dimention variability: A source of nonhyperbolicity chaotic systems // Physica D. 1997. V. 109. P. 81–90.
4. *Bonatti C., Diaz L.J.* Persistent nonhyperbolic transitive diffeomorphisms // Ann. Math. Ser. 2. 1996. V. 143, N 2. P. 357–396.