Функциональный анализ и его приложения
2005, т. 39, вып. 1, с. 27–38

УДК 517.5

Неустранимость нулевых показателей Ляпунова*

© 2005. А. С. Городецкий, Ю. С. Ильяшенко,
В. А. Клепцын, М. Б. Нальский

§1. Введение

В какой мере поведение типичной динамической системы гиперболично?

Очень многие проблемы в современной теории гладких динамических систем могут рассматриваться как те или иные варианты этого вопроса. В 60-х годах было показано, что равномерно гиперболические системы (диффеоморфизмы Аносова, аксиома A) не плотны в пространстве динамических систем [1]. Стало необходимым ослабить условие гиперболичности. Появились понятия частичной и (важной для данной работы) неравномерной гиперболичности (теория Песина [2]). В теории Песина гиперболическое поведение характеризуется ненулевыми показателями Ляпунова относительно некоторой инвариантной меры. Наиболее естественный случай — системы с гладкой инвариантной мерой. Этот случай (в разных аспектах) рассматривается, например, в [3–7]. Однако для отображений, не обладающих a priori естественной инвариантной мерой, вопрос о показателях Ляпунова также может быть поставлен.

Инвариантная мера называется *хорошей*, если она получается из меры Лебега с помощью процедуры Крылова–Боголюбова.

Проблема 1. Верно ли, что типичная гладкая динамическая система на компактном римановом многообразии имеет ненулевые показатели Ляпунова относительно любой хорошей меры?

Эта проблема (в несколько иной формулировке) была поставлена Шубом и Вилкинсон [6] в связи с вопросом о существовании SRB-мер для типичной динамической системы и является открытой. Более того, даже после снятия каких бы то ни было требований на инвариантные меры проблема остается открытой и содержательной.

Гипотеза 1. В пространстве диффеоморфизмов трехмерного тора существует открытое множество, такое, что каждое отображение из этого множества имеет эргодическую инвариантную меру, один из показателей Ляпунова которой равен нулю.

Эта гипотеза наводит на мысль, что ответ в поставленной выше проблеме может быть и отрицательным, хотя гипотеза и проблема весьма далеки друг от друга.

Мы предполагаем изложить доказательство этой гипотезы в серии статей, главным автором которых является М. Б. Нальский. Настоящая работа является первой статьей в этой серии.

---

*Работа всех авторов осуществлена при частичной поддержке грантов CRDF RM1-2358-MO-02, РФФИ 02-01-00482 и РФФИ 02-01-22002. Исследования второго автора частично поддержаны грантом NSF 0400945.

Авторы благодарны Д. В. Тураеву, М. Виане, А. Б. Катку, Я. Б. Песину и Э. Жису за плодотворные обсуждения и интерес к работе, а также рецензенту за полезные замечания.

§2. Основные результаты

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Рассмотрим сдвиг Бернулли $\sigma\colon \Sigma^2 \to \Sigma^2$ на пространстве двусторонних последовательностей из нулей и единиц. Пусть

$$f_j\colon S^1 \to S^1, \qquad j = 0, 1, \tag{1}$$

— два диффеоморфизма окружности. Пусть $M = \Sigma^2 \times S^1$. Рассмотрим ступенчатое косое произведение

$$F\colon M \to M, \qquad (\omega, x) \to (\sigma\omega, f_{\omega_0}(x)). \tag{2}$$

Мы называем его ступенчатым, потому что отображение в слое зависит только от нулевого (т. е. стоящего на нулевом месте) знака соответствующей последовательности в базе и тем самым напоминает ступенчатую функцию на Σ^2.

Теорема 1. *В пространстве* $(\mathrm{Diff}^1(S^1))^2$ *пар диффеоморфизмов окружности с топологией* C^1 *существует открытое подмножество* U*, такое, что для каждой пары из* U *соответствующее косое произведение* (2) *имеет эргодическую инвариантную меру, для которой показатель Ляпунова вдоль слоя равен нулю.*

Определение показателя Ляпунова вдоль слоя для отображения (2) напоминается в начале §4.

Теорема 1 вытекает из теорем 2 и 3.

Теорема 2. *Рассмотрим множество пар отображений* (1)*, таких, что*

(i) *действие полугруппы* $G^+(f_0, f_1)$*, порожденной диффеоморфизмами* f_0, f_1*, минимально, т. е. каждая его орбита плотна в* S^1*;*

(ii) *для каждой точки* $x \in S^1$ *существует такое* $j \in \{0, 1\}$*, что* $|f_j'(x)| > 1$*;*

(iii) *найдется диффеоморфизм* $f \in G^+(f_0, f_1)$*, имеющий гиперболическую притягивающую периодическую точку.*

Тогда для соответствующего косого произведения (2) *существует эргодическая инвариантная мера, для которой показатель Ляпунова вдоль слоя равен нулю.*

Замечание 1. Как следует из анализа доказательств и соображений типа компактности окружности, условие (ii) может быть ослаблено до следующего:

(ii′) *для каждой точки* $x \in S^1$ *существует такой элемент* $g \in G^+(f_0, f_1)$*, что*

$$|g'(x)| > 1.$$

Добавление к теореме 2. *Мера в теореме 2 может быть выбрана неатомарной.*

Теорема 3. *Существует открытое множество в пространстве* $(\mathrm{Diff}^1(S^1))^2$*, все пары из которого обладают свойствами* (i)*,* (ii) *и* (iii)*.*

Предполагается вывести сформулированную выше гипотезу из теоремы 1 по следующему плану.

Каждая система F вида (2) из теоремы 1 допускает «гладкую реализацию» в смысле [10]. А именно, существует гладкое отображение $\mathscr{F}$ трехмерного тора в себя с инвариантным частично гиперболическим множеством Λ, расслоенным на окружности, обладающее следующим свойством. Ограничение отображения $\mathscr{F}$ на Λ топологически сопряжено F, причем ограничение сопрягающего гомеоморфизма на центральный слой является гладким отображением. Малое возмущение отображения $\mathscr{F}$ имеет инвариантное множество, гомеоморфное Λ (см. [8]). В следующей статье, находящейся на стадии подготовки, предполагается доказать, что все отображения из малой окрестности отображения $\mathscr{F}$ — такие, как указано в гипотезе. Заметим, что для полной реализации этой программы следует взять исходное отображение $\mathscr{F}$ класса C^2 и рассматривать его C^2-малую окрестность. В данной работе рассматривается C^1-отображение F и C^1-окрестность в классе ступенчатых систем.

Этот план существенно опирается на статьи [9–11] и служит продолжением начатых там исследований.

§3. План статьи

Для доказательства теоремы 2 мы будем строить искомую меру как предел мер, равномерно распределенных на периодических орбитах, показатели Ляпунова которых стремятся к нулю. Кроме того, периодические орбиты будут в некотором смысле «похожи» друг на друга.

Идея реализуется следующим образом. В §4 показывается, что для рассматриваемых отображений можно утверждать, что если предел эргодических мер эргодичен, то показатель Ляпунова вдоль слоя для предельной меры есть предел показателей Ляпунова. В §5 даются достаточные условия эргодичности предельной меры (один из авторов был вдохновлен идеей А. Б. Катка и А. М. Степина о приближении эргодических систем периодическими; особенное влияние на материал §5 оказала работа [17]). В §6 описывается конструкция, позволяющая по одной периодической орбите построить другую, с бóльшим периодом, меньшим (по модулю) показателем Ляпунова и достаточно «похожую» на исходную. После этого в §7 строится требуемая последовательность орбит и для нее обосновывается выполнение достаточных условий эргодичности. Это доказывает теорему 2.

Кроме того, в §8 мы доказываем добавление к теореме 2, которое утверждает, что найденная в этой теореме мера неатомарна.

И наконец, в §9 приводится пример C^1-открытого множества пар отображений, удовлетворяющих условиям теоремы 2. Это доказывает теорему 3.

§4. Эргодичность и показатели Ляпунова

Определение 1. Пусть F — косое произведение вида (2).

Показателем Ляпунова вдоль слоя в точке (w,x) называется следующая функция (она определена в тех точках, где предел существует):

$$\lambda^c(w,x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln |(f_{w_n} \circ f_{w_{n-1}} \circ \cdots \circ f_{w_0})'(x)|.$$

Если отображение F обладает эргодической вероятностной мерой ν, то найдется множество ν-полной меры, такое, что для всех точек из этого множества показатель Ляпунова вдоль слоя определен и не зависит от точки множества.

В этом случае функция $\lambda^c(w,x)$ — константа на множестве ν-полной меры и можно говорить о показателе Ляпунова вдоль слоя относительно меры ν (обозначение $\lambda^c(\nu)$).

Далее, говоря о сходимости мер, мы везде подразумеваем $*$-слабую сходимость: последовательность μ_n сходится к μ, если для любой непрерывной функции φ

$$\int \varphi\, d\mu_n \longrightarrow \int \varphi\, d\mu \quad \text{при } n \to \infty.$$

Лемма 1. *Пусть μ_n и μ — эргодические вероятностные меры для косого произведения F, причем $\mu_n \to \mu$ при $n \to \infty$. Тогда $\lambda^c(\mu_n) \to \lambda^c(\mu)$.*

Доказательство. По определению показатель Ляпунова вдоль слоя в точке x — это временно́е среднее функции $\varphi = \ln(\partial F/\partial x)$ в той же точке. В силу эргодичности мер μ_n (соответственно μ) это временное среднее равно пространственному среднему функции φ по соответствующей мере для μ_n-почти всех (соответственно μ-почти всех) точек. Функция φ непрерывна. В силу $*$-слабой сходимости мер μ_n к μ получаем

$$\lambda^c(\mu_n) = \int \varphi\, d\mu_n \longrightarrow \int \varphi\, d\mu = \lambda^c(\mu).$$

§5. Достаточные условия эргодичности

Пусть G — произвольное непрерывное отображение метрического компакта Q в себя. Пусть X_n — периодические орбиты отображения G, P_n — их периоды, а μ_n — атомарные меры, распределенные равномерно на этих орбитах.

Определение 2. Назовем *n-мерой точки* x_0 атомарную меру, распределенную равномерно на n последовательных итерациях точки x_0 под действием G:

$$\nu_n(x_0) = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \delta_{G^i(x_0)},$$

где δ_x есть δ-мера с носителем в точке x.

Предложение 1. *Эргодичность меры μ эквивалентна $*$-слабой сходимости к ней n-мер всех точек множества полной μ-меры.*

Доказательство. По определению n-меры

$$\forall \varphi \in C(Q),\ x_0 \in Q \qquad \int_Q \varphi\, d\nu_n(x_0) = \overline{\varphi}_n(x_0) := \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \varphi \circ G^i(x_0).$$

А значит, сходимость n-мер к μ эквивалентна сходимости частичных временных средних $\overline{\varphi}_n(x_0)$ к пространственному $\overline{\varphi} := \int \varphi\, d\mu$. Такая сходимость на множестве μ-полной меры и означает эргодичность меры μ. □

Следующая лемма является ключевой в доказательстве эргодичности предельной меры.

Лемма 2. *Пусть $\{X_n\}$ — последовательность периодических орбит возрастающего периода непрерывного отображения G метрического компакта Q в себя, P_n — периоды, μ_n — вероятностные атомарные меры, распределенные* *равномерно на орбитах, и μ — один из частичных пределов последовательности $\{\mu_n\}$.*

Пусть для любой непрерывной на Q функции φ и для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon, \varphi) \in \mathbb{N}$, такое, что для любого $m > N$ существует подмножество $\widetilde{X}_{m,\varepsilon} \subset X_m$, удовлетворяющее следующим требованиям:

1) $\mu_m(\widetilde{X}_{m,\varepsilon}) > 1 - \varepsilon$;

2) *для любого n, такого, что $m > n \geqslant N$, и для любого $x \in \widetilde{X}_{m,\varepsilon}$*

$$\left| \int \varphi \, d\nu_{P_n}(x) - \int \varphi \, d\mu_n \right| < \varepsilon.$$

Тогда мера μ эргодична.

Замечание 2. В §§6 и 7 для косого произведения F, удовлетворяющего условиям теоремы 2, будут построены периодические орбиты, которые удовлетворяют условиям леммы 2 и для которых показатель Ляпунова вдоль слоя стремится к нулю. Из леммы 2 следует эргодичность предельной меры для последовательности мер, распределенных равномерно на этих орбитах. Из леммы 1 следует, что показатель Ляпунова вдоль слоя отображения F относительно предельной меры равен нулю. Это докажет теорему 2.

Доказательство леммы 2. Переходя к подпоследовательности, без ограничения общности можем считать, что μ является пределом мер μ_n.

В силу предложения 1 эргодичность меры μ эквивалентна $*$-слабой сходимости мер $\nu_n(x)$ к μ. Таким образом, требуется доказать существование такого множества $\widetilde{X}$ полной меры μ, что

$$\forall \varphi \in C(Q),\ x \in \widetilde{X} \quad \nu_n(x) \to \mu \quad \text{при } n \to \infty.$$

Имеет место следующее вспомогательное утверждение [13]:

Предложение 2. *Пусть $\mu_m \to \mu$ и Y_m суть μ_m-измеримые множества. Рассмотрим верхний топологический предел*

$$Y := \overline{\lim\operatorname{top}}_{m\to\infty} Y_m = \{y \mid \exists m_i \to \infty,\ y_i \in Y_{m_i} : y_i \to y\}.$$

Тогда $\mu(Y) \geqslant \overline{\lim}_{m\to\infty} \mu_m(Y_m)$.

Зафиксируем произвольные $\varphi \in C(Q)$ и $\varepsilon > 0$. Выберем $n > N(\varepsilon, \varphi)$. Рассмотрим множество

$$\widetilde{X}_\varepsilon = \overline{\lim\operatorname{top}}_{m\to\infty} \widetilde{X}_{m,\varepsilon},$$

В силу предложения 2 имеем $\mu(\widetilde{X}_\varepsilon) \geqslant 1 - \varepsilon$.

По определению $\widetilde{X}_\varepsilon$ для любого $x \in \widetilde{X}_\varepsilon$ существует последовательность точек $x_{m_i} \in \widetilde{X}_{m_i,\varepsilon}$, сходящаяся к x. Отсюда вытекает, что для любого $n > N$

$$\left| \int \varphi \, d\nu_{P_n}(x) - \int \varphi \, d\nu_{P_n}(x_{m_i}) \right| < \varepsilon \tag{3}$$

при достаточно больших m_i в силу непрерывности G и компактности $\widetilde{X}_\varepsilon$.

Из условий леммы следует, что для $m_i > n$

$$\left| \int \varphi \, d\nu_{P_n}(x_{m_i}) - \int \varphi \, d\mu_n \right| < \varepsilon. \tag{4}$$

В силу сходимости $\mu_n \to \mu$ при достаточно больших n выполняется неравенство

$$\left| \int \varphi \, d\mu_n - \int \varphi \, d\mu \right| < \varepsilon. \tag{5}$$

Объединяя (3)–(5), получаем

$$\left| \int \varphi \, d\nu_{P_n}(x) - \int \varphi \, d\mu \right| < 3\varepsilon. \tag{6}$$

Мы доказали, что для произвольных φ и ε для всех точек $x \in \widetilde{X}_\varepsilon$ последовательность частичных временных средних $\overline{\varphi}_k(x)$ имеет счетное число членов $\overline{\varphi}_{P_n}(x)$ в (3ε)-окрестности пространственного среднего $\overline{\varphi} := \int \varphi \, d\mu$.

В силу теоремы Биркгофа–Хинчина существует множество Y μ-полной меры, для всех точек которого временные средние функции φ сходятся.

Отсюда следует, что для произвольного ε на множестве $Y_\varepsilon := Y \cap \widetilde{X}_\varepsilon$, $\mu(Y_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$, временные средние (3ε)-близки к пространственному. Положим

$$\widetilde{X} := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\varepsilon < 1/k} Y_\varepsilon.$$

Множество $\widetilde{X}$ имеет полную меру. В силу (6) временные средние на $\widetilde{X}$ сколь угодно близки к пространственным, а значит, совпадают с ними. Эргодичность меры μ доказана. □

§6. Основная лемма

Пусть f_0, f_1 — диффеоморфизмы окружности. Порождаемую ими полугруппу обозначим через $G^+(f_0, f_1)$.

Следующие два предложения легко выводятся из компактности окружности.

Предложение 3. *Если полугруппа $G^+(f_0, f_1)$ действует минимально (т. е. любая орбита плотна в S^1), то для любого интервала J на окружности найдутся такие $K = K(J)$ и $\delta_0 = \delta_0(J) > 0$, что любой интервал I длины, меньшей δ_0, может быть переведен внутрь J композицией не более чем K отображений f_0 и f_1.*

Предложение 4. *Пусть для любой точки x окружности для некоторого i имеем $f_i'(x) > 1$. Тогда найдутся $\nu > 1, \delta_1 > 0$, такие, что для любого интервала I длины менее δ_1 на окружности для одного из f_j имеем*

$$\forall x \in I \quad f_j'(x) > \nu.$$

Положим

$$L = \max_j \max_{x \in S^1} |f_j'(x)|.$$

Определение 3. Пусть задана периодическая орбита X отображения F, ее период равен P и $\varepsilon > 0$ фиксировано. Точка y называется *(ε, P)-хорошей* для орбиты X, если найдется точка $x \in X$, такая, что

$$\forall k = 0, 1, \ldots, P-1 \quad \operatorname{dist}(F^k(x), F^k(y)) < \varepsilon.$$

Лемма 3. *Пусть косое произведение F вида (2) удовлетворяет условиям теоремы 2. Пусть X — произвольная периодическая орбита косого произ-*

ведения F периода P с мультипликатором по слою α, $0 < \alpha < 1$. Пусть $\lambda := (\ln\alpha)/P < 0$.

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует периодическая орбита Y косого произведения F с периодом $P' > 2P$ и показателем Ляпунова вдоль слоя $\lambda' < 0$, такая, что

1) $|\lambda'| < |\lambda|(1 - (\ln\nu)/(2\ln L))$;

2) *существует $\widetilde{Y} \subset Y$ и проекция $\pi\colon \widetilde{Y} \to X$, такие, что*

(a) *все точки из $\widetilde{Y}$ являются (ε, P)-хорошими относительно орбиты X, причем в определении 3 можно взять $x = \pi(y)$;*

(b) *доля $\varkappa := \#\widetilde{Y}/\#Y$ точек, в которых определена проекция π, оценивается формулой*

$$\varkappa \geqslant 1 - \frac{2|\lambda|}{\ln L};$$

(c) *количество элементов прообраза $\pi^{-1}(x)$ одинаково для всех $x \in X$.*

Доказательство. Периодическая орбита косого произведения задается своей начальной точкой (ω, x). Здесь $x \in S^1$, $\omega \in \Sigma^2$ — периодическая последовательность и $w = (w_0 \dots w_{n-1})$ — ее период из нулей и единиц: $\omega = \dots www\dots = (w)$.

Имея орбиту X с начальной точкой $(\omega, x) = ((w), x)$, ищем орбиту Y с началом $(\omega', x') = ((w'), x')$, где

$$w' = w^k R_1 R_2 = \underbrace{w\dots w}_{k\ \text{раз}} R_1 R_2.$$

Здесь k — большое натуральное число, которое будет выбрано ниже, w, w', R_1 и R_2 — слова конечной длины, x, x' — точки на окружности.

Положим

$$T_w := f_{w_{n-1}} \circ f_{w_{n-2}} \circ \dots \circ f_{w_0},$$

где w — слово длины n.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем и зафиксируем константы α_- и α_+, достаточно близкие к α, $0 < \alpha_- < \alpha < \alpha_+ < 1$. Как именно производится выбор, будет указано далее (см. неравенство (8)). Найдется такой интервал J, содержащий точку x и не содержащий других неподвижных точек отображения T_w, для которого выполнено следующее условие:

$$\forall x \in J \quad \alpha_- \leqslant T'_w(x) \leqslant \alpha_+ \quad \text{и} \quad L^P|J| < \varepsilon. \tag{7}$$

Тогда

$$\forall k \quad |T_{w^k}(J)| \leqslant \alpha_+^k |J|.$$

Зафиксируем $K(J)$ и $\delta_0(J)$ согласно предложению 3. Зафиксируем ν и δ_1 согласно предложению 4. Заметим, что ν и δ_1 не зависят от периодической орбиты X.

Положим $\delta = \min(\delta_0(J), \delta_1, |J|L^{-K(J)})$.

Пусть $r = r(k)$ — натуральное число, для которого выполнены неравенства

$$\frac{\delta}{L} \leqslant \alpha_+^k L^{r(k)}|J| < \delta$$

(такое $r(k)$ найдется при достаточно больших k).

По предложению 4 найдется композиция из $r(k)$ отображений f_i (первое рассматривается на интервале $T_{w^k}(J)$, каждое следующее — на образе предыдущего), все отображения которой растягивают в каждой точке соответствующих интервалов не менее чем в ν раз. Обозначим соответствующее слово через R_1. Пусть $I = T_{R_1} \circ T_{w^k}(J)$. Тогда

$$|I| < \delta \leqslant \delta_0(J).$$

По определению $\delta_0(J)$ найдется слово R_2, $|R_2| < K(J)$, такое, что $T_{R_2}(I) \subset J$.

Для производной $T'_{w'}$ на всем интервале J выполнена оценка

$$|T'_{w'}| < \alpha_+^k L^{r(k)} L^K < \frac{\delta}{|J|} L^K \leqslant 1.$$

Отображение $T_{w'}$ является сжимающим на J и переводит J в себя; следовательно, оно имеет единственную неподвижную точку $x' \in J$. Орбита $Y = Y(k)$ с начальной точкой $(\omega', x') = ((w'), x')$ полностью определена для каждого достаточно большого k. Оценим снизу показатель Ляпунова вдоль слоя отображения F в точке x'.

Найдется такая константа $C_1 = C_1(w, J)$, что на интервале J

$$|T'_{w'}| > C_1(w, J)\alpha_-^k \nu^{r(k)}.$$

По определению $r(k)$ найдется такая константа $C_2 = C_2(w, J)$, что

$$r(k) > \frac{1}{\ln L}(-k \ln \alpha_+ + C_2(w, J)),$$

откуда

$$\ln T'_{w'}(x') \geqslant k \ln \alpha_- + r(k) \ln \nu + C_3(w, J) \geqslant k\left(\ln \alpha_- - \frac{\ln \nu}{\ln L} \ln \alpha_+\right) + C_4(w, J).$$

Теперь конкретизируем выбор α_- и α_+: они выбираются настолько близкими к α, чтобы выполнялось неравенство

$$\ln \alpha_- - \frac{\ln \nu}{\ln L} \alpha_+ \geqslant \ln \alpha \left(1 - \frac{\ln \nu}{1.5 \ln L}\right). \tag{8}$$

Подставив (8) в предыдущую оценку, имеем

$$\ln T'_{w'} \geqslant k \ln \alpha \left(1 - \frac{\ln \nu}{1.5 \ln L}\right) + C_4(w, J).$$

Для показателя Ляпунова орбиты $Y(k)$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \lambda(Y(k)) = \frac{\ln T'_{w'}(x')}{kP + r(k) + K} &\geqslant \frac{k \ln \alpha (1 - \frac{\ln \nu}{1.5 \ln L}) + C_4(w, J)}{kP} \\ &= \lambda(X)\left(1 - \frac{\ln \nu}{1.5 \ln L}\right) + O\left(\frac{1}{k}\right). \end{aligned}$$

Положим $\lambda := \lambda(X)$, $\lambda' := \lambda(Y(k))$. Получим, что при достаточно больших k

$$\lambda' \geqslant \lambda \left(1 - \frac{\ln \nu}{2 \ln L}\right).$$

Первое утверждение леммы 3 доказано. Докажем второе.

Определим множество $\widetilde{Y}$ и проекцию π. Пусть $M = M(\varepsilon, w)$ — минимальное натуральное число, такое, что $2^{-MP} \leqslant \varepsilon$. При $k > M$ положим

$$\widetilde{Y} = \{F^j(\omega', x') \mid MP \leqslant j \leqslant (k - M - 1)P\}.$$

Заметим, что множество $\widetilde{Y}$ содержится в множестве первых kP итераций точки (ω', x').

Определим проекцию $\pi\colon \widetilde{Y} \to X$ следующим образом:

$$\pi(F^j(\omega', x')) = F^{\rho}(\omega, x),$$

где ρ — остаток от деления j на P. Очевидно, что число точек в прообразе $\pi^{-1}(\tilde{\omega}, \tilde{x})$ не зависит от $(\tilde{\omega}, \tilde{x})$ и равно $k-2M-1$. Условие 2(c) леммы выполнено.

Предложение 5. *Все точки множества $\widetilde{Y}$ являются $(2\varepsilon, P)$-хорошими для орбиты X.*

Доказательство. Оценим расстояние по базе. В силу выбора M расстояние между Σ^2-координатами точек $\tilde{y} \in \widetilde{Y}$ и $\pi(\tilde{y}) \in X$ не превосходит ε.

Оценим расстояние по слою. Образ точки x' после Pl итераций, $0 \leqslant l \leqslant k$, содержится в отрезке J. Обозначим его через x'_l. Интервал J был выбран так (см. (7)), что за t итераций, $0 \leqslant t < P$, точки x и x'_l не могут разойтись на расстояние, большее ε.

Таким образом, орбиты точек x и x' за первые kP итераций расходятся вдоль слоя на расстояние, меньшее ε.

Значит, первые P итераций точек $\tilde{y} \in \widetilde{Y}$ и $\pi(\tilde{y})$ расходятся в $\Sigma^2 \times S^1$ на расстояние, меньшее 2ε. $\square$

Это доказывает утверждение 2(a) леммы 3.

Оценим долю точек на орбите Y, не являющихся хорошими для орбиты X:

$$1 - \frac{\#\widetilde{Y}}{\#Y} = \frac{(2M-1)P + r + K}{kP + r + K} \leqslant \frac{C_6(w, J, \varepsilon) + r}{kP}$$
$$\leqslant \frac{C_7(w, J, \varepsilon)}{kP} + \frac{-k \ln \alpha}{kP \ln L} = -\frac{\lambda}{\ln L} + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Отсюда следует утверждение 2(b) леммы 3 для достаточно больших k. Остальные заключения леммы уже доказаны. $\square$

§ 7. Построение последовательности периодических орбит

Лемма 4. *Пусть отображения f_0, f_1 удовлетворяют требованиям теоремы 2. Тогда у косого произведения F существует набор периодических орбит X_n, у которых*

1) *периоды P_n неограниченно возрастают*;
2) *показатели Ляпунова вдоль слоя λ_n^c отрицательны и стремятся к нулю*;
3) *выполнены условия леммы* 2.

Доказательство. Выберем произвольную последовательность $\{\varepsilon_n\}$ так, что $\sum \varepsilon_n < \infty$. В § 8 на выбор этой последовательности наложено дополнительное ограничение, не влияющее на рассуждения настоящего параграфа. В качестве притягивающей вдоль слоя орбиты X_1 мы возьмем периодическую орбиту, соответствующую гиперболической притягивающей периодической точке диффеоморфизма f из условия (iii).

Используя лемму 3, построим по индукции последовательность периодических орбит X_n, выбирая на каждом шаге $\varepsilon = \varepsilon_n$. У построенной последовательности периоды стремятся к бесконечности, а показатели Ляпунова вдоль слоя экспоненциально стремятся к нулю.

Проверим выполнение условий леммы 2. Пусть $\varepsilon > 0$, $\varphi \in C(M)$ произвольные. Согласно лемме 3, для построенных орбит определена последовательность проекций $\pi_n\colon \widetilde{X}_{n+1} \to X_n$, такая, что

$$\prod_{n=1}^{\infty} \varkappa_n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\#\widetilde{X}_{n+1}}{\#X_n} > 0.$$

(Действительно, произведение сходится, так как $1-\varkappa_n$ не превосходит $2|\lambda_n|/\ln L$ и, следовательно, мажорируется убывающей геометрической прогрессией.)

Выберем $\delta = \delta(\varepsilon, \varphi)$, такое, что

$$\omega_\delta(\varphi) := \sup_{\operatorname{dist}(x,y)<\delta} |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon.$$

Выберем $N = N(\varepsilon, \varphi)$, чтобы выполнялись условия

$$\sum_{N}^{\infty} \varepsilon_k < \delta(\varepsilon, \varphi) \quad \text{и} \quad \prod_{N}^{\infty} \varkappa_k > 1 - \varepsilon.$$

Поскольку число прообразов при проекциях π_n не зависит от точки в образе, множество $\widetilde{X}_{m,\varepsilon} \subset X_m$, на котором определена сквозная проекция $\pi_{m,N} = \pi_{m-1} \circ \dots \circ \pi_N$, составляет бóльшую часть орбиты X_m:

$$\frac{\#\widetilde{X}_{m,\varepsilon}}{\#X_m} = \prod_{k=N}^{m-1} \varkappa_k \geqslant \prod_{N}^{\infty} \varkappa_k > 1 - \varepsilon.$$

Пусть m, n произвольные, $m > n > N(\varepsilon, \varphi)$. На множестве $\widetilde{X}_{m,\varepsilon}$ определена сквозная проекция $\pi_{m,n} = \pi_{m-1} \circ \ldots \circ \pi_n$. Все точки множества $\widetilde{X}_{m,\varepsilon} \subset X_m$ являются $(\delta(\varepsilon,\varphi), P_n)$-хорошими относительно орбиты X_n. Следовательно, для $x \in \widetilde{X}_{m,\varepsilon}$

$$\left| \int \varphi \, d\nu_{P_n}(x) - \int \varphi \, d\mu_n \right| < \omega_\delta(\varphi) < \varepsilon.$$

Условия леммы 2 выполнены полностью. □

Согласно замечанию из §5, теорема 2 полностью доказана.

§8. Неатомарность предельной меры

В §7 мы закончили доказательство теоремы 2, построив эргодическую инвариантную меру с нулевым центральным показателем Ляпунова. Добавление к теореме 2 утверждает, что предельную меру можно выбрать нетривиальной — не сосредоточенной на периодической орбите. Докажем это.

Доказательство добавления к теореме 2. Пусть все обозначения такие же, как в предыдущем параграфе. Рассмотрим любую точку $x \in X_n$. Заметим, что этой точке соответствует $\varkappa_{n+1}\frac{P_{n+1}}{P_n}$ точек орбиты X_{n+1}, лежащих в ее ε_{n+1}-окрестности. Мера μ_{n+1} этих точек в $\varkappa_{n+1}$ раз меньше, чем мера μ_n исходной точки, т.е. за одну итерацию процесса индукции точка «расплывается» на ε_{n+1}, а мера при этом умножается на $\varkappa_{n+1}$. Получаем следующую последовательность оценок:

$$\mu_{n+1}(U_{\varepsilon_{n+1}}(x)) \geqslant \varkappa_{n+1}\mu_n(\{x\}),$$
$$\mu_{n+2}(U_{\varepsilon_{n+2}+\varepsilon_{n+1}}(x)) \geqslant \varkappa_{n+2}\mu_{n+1}(U_{\varepsilon_{n+1}}(x)) \geqslant \varkappa_{n+2}\varkappa_{n+1}\mu_n(\{x\})$$

и т. д. Переходя к пределу, получаем

$$\mu(\overline{U_{r_n}(x)}) \geqslant \prod_{n+1}^{\infty} \varkappa_k \cdot \mu_n(x) > 0,$$

где через r_n обозначена сумма $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon_k$. Итак, мера μ замкнутого шара радиуса r_n с центром в любой из точек орбиты X_n положительна.

Заметим, что в §7 мы можем задавать последовательность $\{\varepsilon_n\}$ не до построения последовательности орбит X_n, а одновременно с ней, строя X_n по ε_n и ε_{n+1} по X_n. А именно, обозначим через d_n наименьшее расстояние между двумя различными точками из X_n и положим $\varepsilon_{n+1} = (\min_{j\leqslant n} d_j)/(3\cdot 2^n)$. Тогда ряд $\sum \varepsilon_k$ будет сходиться и, более того, $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon_k \leqslant d_n/3$. Таким образом, любые два r_n-шара с центрами в различных точках орбиты X_n не пересекаются. Но мера μ каждого такого шара положительна; поэтому мера μ не может быть сконцентрирована в менее чем P_n точках. С другой стороны, n произвольно, а длины периодов P_n стремятся к бесконечности. Следовательно, мера μ не сосредоточена на конечном множестве. □

§9. Доказательство теоремы 3

В статьях [9, 10] обоснован следующий результат:

Теорема 4. *Пусть отображение f_0 имеет ровно две неподвижные точки a и b, $f_0'(a) \in (1,2)$, $f_0'(b) \in (1/2,1)$, а отображение f_1 — иррациональный поворот окружности. Тогда найдется окрестность $U \subset (\mathrm{Diff}(S^1))^2$ пары диффеоморфизмов (f_0, f_1), такая, что для любой пары $(\tilde f_0, \tilde f_1) \in U$ действие $G^+(\tilde f_0, \tilde f_1)$ минимально.*

Выберем произвольные f_0, f_1, удовлетворяющие условиям теоремы 4. Пусть U — окрестность системы (f_0, f_1) в $(\mathrm{Diff}(S^1))^2$, в которой действие каждой пары минимально.

Пусть f_2 — отображение, близкое к f_1 и такое, что $f_2'(x) > 1$ на множестве $I = \{x \in S^1 \mid f_0'(x) \leqslant 1\}$. Выбирая f_2 достаточно близким к f_1, мы можем добиться того, что $(f_0, f_2) \in U$.

Для пары (f_0, f_2) свойства (ii) и (iii) из теоремы 2 выполнены. Но свойства (ii) и (iii) являются C^1-открытыми; поэтому найдется такая окрестность V пары (f_0, f_2), что каждая пара отображений из V удовлетворяет этим условиям.

Для любой пары отображений (g_0, g_1) из множества $U \cap V$ условия (i), (ii) и (iii) выполнены. Теорема 3 доказана.

Литература

1. *Abraham R., Smale S.* Nongenericity of Ω-stability. In: Global Analysis (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XIV, Berkeley, Calif., 1968), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1970, pp. 5–8.

2. *Песин Я. Б.* Характеристические показатели Ляпунова и гладкая эргодическая теория. УМН, **32**, вып. 4 (196), 55–112 (1977).
3. *Bochi J.* Genericity of zero Lyapunov exponents. Ergodic Theory Dynam. Systems, **22**, No. 6, 1667–1696 (2002).
4. *Bochi J., Viana M.* Uniform (projective) hyperbolicity or no hyperbolicity: a dichotomy for generic conservative maps. Ann. Inst. H. Poincare Anal. Non Liniaire, **19**, No. 1, 113–123 (2002).
5. *Baraviera A., Bonatti C.* Removing zero Lyapunov exponents. Ergodic Theory Dynam. Systems, **23**, 1655–1670 (2003).
6. *Shub M., Wilkinson A.* Pathological foliations and removable zero exponents. Invent. Math., **139**, 495–508 (2000).
7. *Dolgopyat D., Pesin Y.* Every compact manifold carries a completely hyperbolic diffeomorphism. Ergodic Theory Dynam. Systems, **22**, No. 2, 409–435 (2002).
8. *Hirsch M. W., Pugh C. C., Shub M.* Invariant manifolds. Lecture Notes in Math., Vol. 583, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1977.
9. *Городецкий А. С., Ильяшенко Ю. С.* Некоторые новые грубые свойства инвариантных множеств и аттракторов динамических систем. Функц. анализ и его прил., **33**, вып. 2, 16–30 (1999).
10. *Городецкий А. С., Ильяшенко Ю. С.* Некоторые свойства косых произведений над подковой и соленоидом. Труды МИРАН, **231**, 6–118 (2000).
11. *Городецкий А. С.* Минимальные аттракторы и частично гиперболические инвариантные множества динамических систем. Дисс. к.ф.-м.н., МГУ им. Ломоносова, мех.-мат. факультет, 2001.
12. *Клепцын В. А., Нальский М. Б.* Сближение орбит в случайных динамических системах на окружности. Функц. анализ и его прил., **38**, вып. 4, 36–54 (2004).
13. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Теория функций и функционального анализа. М.: Наука, 1964.
14. *Ilyashenko Yu., Li W.* Nonlocal bifurcations. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1999.
15. *Каток А. Б., Хасселблат Б.* Введение в современную теорию динамических систем. Факториал, М., 1999.
16. *Каток А. Б., Степин А. М.* Об аппроксимациях эргодических динамических систем периодическими преобразованиями. ДАН СССР, **171**, 1268–1271 (1966).
17. *Каток А. Б., Степин А. М.* Аппроксимации в эргодической теории. УМН, **22**, вып. 5 (137), 81–106 (1967).

Поступило в редакцию
24 мая 2004 г.

Независимый московский университет,
Калифорнийский технологический институт
e-mail: asgor@caltech.edu

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Cornell University,
Независимый московский университет,
Математический институт РАН
e-mail: yulijs@mccme.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Независимый московский университет,
UMPA ENS Lyon (UMR 5669 CNRS)
e-mail: kleptsyn@mccme.ru

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: maxim@mccme.ru