manuscripta math. 84, 115 - 224 (1994)

manuscripta mathematica

Sur les algèbres de Lie nilpotentes admettant un tore de dérivations

Michel GOZE, You HAKIMJANOV

Université de Haute Alsace, F.S.T. 32, rue du Grillenbreit, F.68000 COLMAR
Université de Tachkent, 700095 TACHKENT. Ouzbekistan

Summary. We describe the class of complex filiform nilpotent Lie algebras provided with a not trivial external torus of derivations. We prove also that, for dimensions greater than 8, any algebraic irreducible component of the variety of complex nilpotent filiform laws of Lie algebra contains an open set whose elements are characteristically nilpotent laws.

1 Introduction

Une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps de caractéristique nulle est *caractéristiquement nilpotente* si toutes ses dérivations, c'est-à-dire les endomorphismes vérifiant

$$f[X,Y] = [f(X),Y] + [X,f(Y)],$$

sont nilpotentes.

Une telle algèbre est nécessairement nilpotente. En effet toutes ses dérivations intérieures sont nilpotentes et d'après le théorème d'Engel l'algèbre de Lie est nilpotente. De plus ces algèbres ne peuvent jamais apparaître comme des radicaux d'algèbres de Lie non résolubles dont la partie semi simple de Lévi n'est pas un idéal. En effet les opérateurs adjoints associés aux éléments non nuls d'une sous algèbre de Cartan de l'algèbre semi simple de Lévi agissent sur le radical comme des dérivations diagonales non nulles.
La définition et le premier exemple d'une telle algèbre ont été donnés par Dixmier et Lister [D-L]. Les travaux de Dyer [Dy], Favre [F] et Luks [L] décrivant des exemples de ces algèbres en petite dimension faisaient supposer que la classe de ces algèbres caratéristiquement nilpotentes était relativement maigre. Ces exemples permettaient tout de même de conclure à l'existence d'une telle algèbre de Lie en toute dimension n, $n \geq 7$, la somme directe de deux algèbres caractéristiquement

nilpotentes étant aussi caractéristiquement nilpotente [L-T]. L'inexistence en dimension inférieure ou égale à 6 résulte de la classification des algèbres de Lie nilpotentes sur un corps de caractéristique nulle [Di] et [M]. Récemment l'un des auteurs a mis en évidence un ouvert de Zariski dans la variété des algèbres de Lie nilpotentes constitué uniquement de ce type d'algèbres et ceci dès la dimension 7 [H2]. Le rôle de ces algèbres semble ces derniers temps plus fondé. On peut noter ce rôle dans la classification des algèbres de Lie rigides [A-G], dans les représentations fidèles des algèbres de Lie nilpotentes [B], dans la classification des algèbres résolubles.
Le but de ce travail est de décrire l'ensemble des algèbres filiformes caractéristiquement nilpotentes. Comme conséquence, on établit que toute composante irréductible de la variété F_n des lois filiformes contient un ouvert de Zariski non vide constitué d'algèbres de Lie caractéristiquement nilpotentes dès que $n \geq 8$. Quant aux dimensions inférieures, on sait que F_7 ne contient pas d'ouvert de Zariski constitué de ces algèbres [C].

Nous remercions le Professeur H.P. Kraft pour ses critiques et suggestions qui ont permis une amélioration significative de ce travail.

2. Dérivations diagonalisables d'une algèbre filiforme

2.1 Algèbres de Lie filiformes

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie nilpotente complexe de dimension finie n. Pour tout $X \in \mathfrak{g} - [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ on note

$$c(X) = (c_1(X), c_2(X), \cdots, 1)$$

la suite ordonnée décroissante des dimensions des blocs de Jordan (les invariants de similitude) de l'opérateur nilpotent adX. En ordonnant l'ensemble de ces suites par l'ordre lexicographique on peut définir un invariant à isomorphisme près de $\mathfrak{g}$ par

$$c(\mathfrak{g}) = Sup(c(X), X \in \mathfrak{g} - [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])$$

appelé *la suite caractéristique* de $\mathfrak{g}$.

Définition 1 *L'algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$ est filiforme si sa suite caractéristique $c(\mathfrak{g})$ est maximale, c'est-à-dire égale à $(n-1, 1)$.*

2.2. Algèbres filiformes graduées

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie filiforme. Elle est naturellement filtrée par la suite centrale descendante

$$C^i(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}\ ,\ i \leq 0; \quad C^i(\mathfrak{g}) = [\mathfrak{g}, C^{i-1}(\mathfrak{g})]\ ,\ i \geq 1.$$

Ceci permet d'associer à toute algèbre de Lie filiforme une algèbre de Lie graduée, notée $gr(\mathfrak{g})$ également filiforme définie par

$$gr(\mathfrak{g}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} C^{i-1}(\mathfrak{g})/C^i(\mathfrak{g}).$$

Exemples.

1. Soit $n \geq 2$ et L_n l'algèbre de Lie de dimension $n+1$ définie dans la base $(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ par:

$$[X_0, X_i] = X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n-1$$

(les crochets non écrits étant nuls, exceptés ceux découlant de l'antisymétrie). On a ici $gr(L_n) = L_n$.

2. Soit $n = 2k+1$, $k \geq 1$. L'algèbre de Lie Q_n de dimension $n+1$ définie dans la base $(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ par

$$[X_0, X_i] = X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n-1 \ , \ [X_i, X_{n-i}] = (-1)^i X_n \quad 1 \leq i \leq n-1$$

vérifie aussi $gr(Q_n) = Q_n$.

Lemme 1. *Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2 + \cdots + \mathfrak{g}_n$ une algèbre de Lie filiforme graduée de dimension $n+1$ vérifiant $gr(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$. Il existe alors une base homogène $(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ de $\mathfrak{g}$ avec X_0 et X_1 dans $\mathfrak{g}_1$ et $X_i \in \mathfrak{g}_i$ si $i \geq 2$ telle que l'on ait $\mathfrak{g} = L_n$ ou $\mathfrak{g} = Q_n$.*

La démonstration de ce lemme est due à Michèle Vergne [V].

Corollaire 1. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie filiforme de dimension $n+1$. Il existe alors une base $(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ de $\mathfrak{g}$ telle que l'on ait soit*

$$(i)\ [X_0, X_i] = X_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad [X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{k=n-i-j} a_{ij}^k X_{i+j+k},$$

soit, et ce cas n'est possible que si n est impair

$$(ii)[X_0, X_i] = X_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1, \quad [X_i, X_{n-i}] = (-1)^i X_n, \quad 1 \leq i \leq n-1,$$

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n-i-j} a_{ij}^k X_{i+j+k}.$$

La base $(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ ainsi définie est appelée **base adaptée.**

2.3. Bases adaptées à une dérivation diagonale

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie filiforme admettant une dérivation diagonalisable $f \neq 0$. Soit $(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ une base adaptée de $\mathfrak{g}$. Il n'y a, à priori, aucune raison pour que cette base soit une base de vecteurs propres de f. Le théorème suivant met en évidence deux possibilités : ou bien on peut trouver une base adaptée de $\mathfrak{g}$ qui soit une base de vecteurs propres de f, ou bien on peut trouver une base de vecteurs propres de f non adaptée pour $\mathfrak{g}$ mais qui contienne un vecteur $X \in \mathfrak{g} - [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ tel que $c(X) = (n-2, 1, 1)$.

Théorème 1. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie filiforme de dimension $n+1$ et f une dérivation diagonalisable de $\mathfrak{g}$. Il existe une base de vecteurs propres $(Z_0, Z_1, \cdots, Z_n)$ de f telle que:*

$$[Z_0, Z_i] = Z_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-2, \quad [Z_0, Z_{n-1}] = a_i Z_n, \quad a_i = 0 \text{ ou } 1,$$

et donc $(n-2,1,1) \leq c(Z_0) \leq (n-1,1)$.

La démonstration repose sur le lemme suivant :

Lemme 2. *Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{C}^n$. Supposons que f soit diagonalisable et que g soit nilpotent. Si f et g vérifient $[f,g] = g$, il existe alors une base de vecteurs propres de f qui soit une base de Jordan de l'endomorphisme nilpotent g.*

Ce lemme donne une condition de réduction simultanée pour deux endomorphismes de $\mathbb{C}^n$, l'un étant diagonalisable. Cette condition peut être interprétée de la sorte: f et g engendrent une sous algèbre résoluble (de dimension 2) de l'algèbre de Lie $End(\mathbb{C}^n)$ dont le nilradical soit de dimension 1 et admet une représentation en matrices nilpotentes.

Démonstration du lemme. Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ une base de vecteurs propres de f associés aux valeurs propres $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ (certaines de ces valeurs pouvant être égales). Alors comme $[f,g] = g$, $g(X_i)$ est un vecteur propre pour $\lambda_i + 1$ si cette valeur est valeur propre, sinon $g(X_i) = 0$. Considérons toutes les racines parmi les valeurs propres $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ telle que $\lambda - 1$ ne soit pas une valeur propre. Supposons que ces racines soient $(\lambda_1, \cdots, \lambda_r)$. Pour chacune de ces λ_i, $i = 1, \cdots, r$, on pose $S(\lambda_i) = (\lambda_i, \lambda_i + 1, \cdots, \lambda_i + p_i)$ où p_i est tel que $\lambda_i + t$ est une valeur propre pour $0 \leq t \leq p_i$ mais $\lambda_i + p_i + 1$ n'est pas valeur propre. Alors les espaces $E^i = \bigcup_{t=0}^{t=p_i} E_{\lambda_i + t}$ où E_λ est l'espace propre associé à λ sont supplémentaires et invariants pour g. Maintenant la réduction simultanée pour la restriction à chacun de ces espaces invariants des endomorphismes f et g correspond à la jordanisation de g.

Corollaire 2. *Soit f une dérivation diagonalisable de l'algèbre de Lie nilpotente $\mathfrak{g}$. Alors, pour tout vecteur propre non nul X de f associé à une valeur propre non nulle, les opérateurs f et adX peuvent être réduits simultanément.*

Remarque: Si $\lambda = 0$, les opérateurs f et adX commutent et le lemme de réduction simultanée est mis en défaut. Mais si la dérivation est non triviale, il existe toujours une valeur propre non nulle.

Démonstration du théorème 1. Soit une base $(Y_0, Y_1, \cdots, Y_n)$ de vecteurs propres de f. Comme $\mathfrak{g}$ est filiforme, on peut supposer Y_0 , $Y_1 \in \mathfrak{g} - [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ et $Y_2, \cdots, Y_n \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Si les vecteurs Y_0 et Y_1 sont associés à des valeurs propres nulles, toutes les autres valeurs propres de f sont nulles car ces deux vecteurs engendrent $\mathfrak{g}$. On peut donc supposer que la valeur propre associée à Y_0 soit non nulle. Les opérateurs f et adY_0 peuvent être réduits simultanément. Ainsi peut-on supposer que la base $(Y_0, \cdots, Y_n)$ soit une base de vecteurs propres de f ainsi qu'une base de Jordan de adY_0. Supposons également que $c(Y_0) \geq c(Y_1)$. Déterminons $c(Y_0)$. Soit $(X_0, X_1, \cdots, X_n)$ une base adaptée de $\mathfrak{g}$. Quitte à multiplier Y_0 ou Y_1 par un scalaire non nul, nous pouvons supposer que l'on ait:

$$1) \quad Y_0 = X_0 + \sum_{i=1}^{i=n} a_i X_i \quad , \quad Y_1 = d_0 X_0 + \sum_{i=1}^{i=n} d_i X_i \quad d_1 \neq a_1 d_0$$

ou bien

$$2) \ \ Y_1 = X_0 + \sum_{i=1}^{i=n} b_i X_i \ \ , \ \ Y_0 = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i \ \ c_1 \neq 0.$$

Dans le premier cas on pose :

$$Z_0 = Y_0 \quad , \quad Z_1 = Y_1$$

$$Z_2 = [Y_0, Y_1] = (d_1 - a_1 d_0) X_2 + \sum_{i=3}^{n} \gamma_{1i} X_i$$

$$Z_{k+1} = (adY_0)^k Y_1 = (d_1 - a_1 d_0) X_{k+1} + \sum_{i=k+2}^{n} \gamma_{ki} X_i.$$

Si la base adaptée $(X_0, \cdots, X_n)$ vérifie la condition (ii) du corollaire 1, alors $(Z_0, \cdots, Z_n)$ est une base de vecteurs propres de f vérifiant $c(Z_0) = (n-2, 1, 1)$. Si la condition (i) est vérifiée, on a alors $c(Z_0) = (n-1, 1)$.

Dans le deuxième cas on pose $Z_0 = Y_1$, $Z_1 = Y_0$ et $Z_i = (adY_0)^{i-1} Z_i$ pour $2 \leq i \leq n$. Ces vecteurs sont bien des vecteurs propres de f. Si la base (X_i) est du type (i) du corollaire 1 alors $c(Z_0) = (n-1, 1)$. Si la base (X_i) est du type (ii) alors soit $b_1/c_1 \neq 1$ et $Z_n \neq 0$ d'où $c(Z_0) = (n-1, 1)$ soit $b_1 = c_1$ et $c(Z_0) = (n-2, 1, 1)$. D'où le théorème.

Corollaire 3. *Il existe une base $(Z_0, Z_1, \cdots, Z_n)$ de $\mathfrak{g}$ formée de vecteurs propres de f telle que*

- soit $gr(\mathfrak{g}) = L_n$ et $(Z_0, Z_1, \cdots, Z_n)$ est une base adaptée de $\mathfrak{g}$,

- soit $gr(\mathfrak{g}) = Q_n$ et $(T_0 - T_1, T_1, \cdots, T_n)$ est une base adaptée de $\mathfrak{g}$, avec $T_0 = Z_0 - Z_1, T_1 = Z_1, T_i = [T_0, T_{i-1}]$, $2 \leq i \leq n$.

Une telle base sera appelée **base de $\mathfrak{g}$ quasi adaptée pour f**.

3. Classification des algèbres de Lie filiformes de rang non nul

Rappelons qu'un tore maximal de dérivations de $\mathfrak{g}$ est une sous algèbre abélienne maximale de l'algèbre des dérivations $Der(\mathfrak{g})$ formées de dérivations diagonalisables deux à deux commutantes. Comme tous ces tores maximaux sont deux à deux conjugués [M], le choix de la dérivation diagonale n'a que peu d'importance.

Définition 2 *Le rang de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est la dimension commune de tous les tores maximaux de dérivations de $\mathfrak{g}$.*

Théorème 2. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie filiforme de dimension $n+1$ et admettant une dérivation diagonalisable f non nulle. Il existe alors une base de $\mathfrak{g}$, $(Z_0, Z_1, \cdots, Z_n)$, quasi adaptée pour f dont les crochets vérifient l'un des cas suivants :*

(i) $\mathfrak{g} = L_n$

$$[Z_0, Z_i] = Z_{i+1} \ , \ 1 \leq i \leq n-1; \quad [Z_i, Z_j] = 0 \ , \ 1 \leq i, j \leq n$$

(ii) $\mathfrak{g} = A^r_{n+1}(\alpha_1, \cdots, \alpha_t) \quad 1 \leq r \leq n-3 \quad t = [(n-r-1)/2]$

$$[Z_0, Z_i] = Z_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n-1$$

$$[Z_i, Z_j] = (\sum_{k=1}^{t} \alpha_k (-1)^{k-i} C_{j-k-1}^{k-1}) Z_{i+j+r} \ , \ 1 \leq i,j \leq n \ \ et \ \ i+j+r \leq n.$$

(iii) $\mathfrak{g} = Q_n \quad n = 2m+1$

$$[Z_0, Z_i] = Z_{i+1} \ , \ 1 \leq i \leq n-2 \ ; \ \ [Z_i, Z_{n-i}] = (-1)^i Z_n \ , \ 1 \leq i \leq n-1$$

$$[Z_i, Z_j] = 0 \ \ 1 \leq i,j \leq n \ \ et \ \ (i,j) \neq (k, n-k) \ \ pour \ \ 1 \leq k \leq n-1$$

(iv) $\mathfrak{g} = B_{n+1}^r(\alpha_1, \cdots, \alpha_t)$, $n = 2m+1$, $1 \leq r \leq n-4$, $t = [(n-r-2)/2]$

$$[Z_0, Z_i] = Z_{i+1} \ , \ 1 \leq i \leq n-2 \ ; \ \ [Z_i, Z_{n-i}] = (-1)^i Z_n \ , \ 1 \leq i \leq n-1$$

$$[Z_i, Z_j] = (\sum_{k=1}^{t} \alpha_k (-1)^{k-i} C_{j-k-1}^{k-1}) Z_{i+j+r} \ , \ 1 \leq i,j \leq n-1 \ et \ i+j+r \leq n-1$$

(v) $\mathfrak{g} = C_{n+1}(\alpha_1, \cdots, \alpha_t)$, $n = 2m+1$, $t = m-1$

$$[Z_0, Z_i] = Z_{i+1} \ , \ 1 \leq i \leq n-2 \ ; \ \ [Z_i, Z_{n-i}] = (-1)^i Z_n \ , \ 1 \leq i \leq n-1$$

$$[Z_i, Z_{n-i-2k}] = (-1)^i \alpha_k Z_n \ , \ 1 \leq k \leq m-1 \ et 1 \leq i \leq n-2k-1.$$

où $(\alpha_1, \cdots, \alpha_t)$ *sont des paramètres vérifiant les relations polynomiales découlant des identités de Jacobi pour les éléments de base* $(Z_0, \cdots, Z_n)$.

Démonstration. Soit f la dérivation diagonalisable de $\mathfrak{g}$ et considérons une base $(Z_0, \cdots, Z_n)$ quasi adaptée pour f.

1) Supposons $gr(\mathfrak{g}) \simeq L_n$ et $\mathfrak{g}$ non isomorphe à l'une des algèbres ci dessus. Il existe alors des entiers i et j avec $1 \leq i,j \leq n-1$ tels que

$$[Z_i, Z_j] = a_{ij} Z_{i+j+r} + b_{ij} Z_{i+j+q} + \sum_{s=q+1}^{s=n-3} d_{ij}^s Z_{i+j+s}$$

$$i+j+s \leq n-3, a_{ij} b_{ij} \neq 0 \ \ et \ \ 1 \leq r \leq q-1 \ , \ i+j+q \leq n.$$

Soient $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de f correspondant aux vecteurs propres $Z_0, \cdots, Z_n$. La relation ci dessus implique :

$$\lambda_i + \lambda_j = \lambda_{i+j+r} = \lambda_{i+j+q}.$$

comme $\lambda_k = \lambda_1 + (k-1)\lambda_0$ pour $r \leq k \leq n$ (ceci découle de la relation $[Z_0, Z_{k-1}] = Z_k$), on a :

$$2\lambda_1 + (i+j-2)\lambda_0 = \lambda_1 + (i+j+r-1)\lambda_0 = \lambda_1 + (i+j+q-1)\lambda_0$$

ce qui est impossible si $f \neq 0$.

2) Supposons $gr(\mathfrak{g}) \simeq Q_n$. Si $\mathfrak{g}$ n'est isomorphe à aucune des algèbres énoncées, deux cas peuvent se présenter :

a) il existe des entiers i et j tels que

$$[Z_i, Z_j] = a_{ij} Z_{i+j+r} + b_{ij} Z_{i+j+q} + \sum_{s=q+1}^{s=n-4} d_{ij}^s Z_{i+j+s}$$

avec $i+j+s \leq n-4$ et $a_{ij}b_{ij} \neq 0$, $1 \leq r \leq q-1$, $i+j+q \leq n-1$.

b) il existe i, j, k et m tels que $1 \leq i,j \leq n-1$, $1 \leq k,m \leq n-1$ et

$$[Z_i, Z_j] = a_{ij} Z_{i+j+r} + \sum_{s=r+1}^{n-4} d_{ij}^s Z_{i+j+s} \quad i+j+s \leq n-1$$

$$[Z_k, Z_m] = b_{km} Z_n + \sum_{s=1}^{n-3} d_{ij}^s Z_{k+m+s} \quad k+m+s \leq n-1$$

avec $a_{ij} \neq 0$, $b_{km} \neq 0$, $1 \leq r \leq n-4$, $k+m \leq n-1$.

Un calcul analogue au calcul précédent montre que la cas a) est impossible. Quant au cas b), il implique

$$\lambda_i + \lambda_j = \lambda_{i+j+r} \quad i+j+r \leq n-1 \ , \ r \geq 1$$

$$et \ \ \lambda_k + \lambda_m = \lambda_n \ \ , \ \ k+m \leq n-1.$$

Comme $\lambda_s = \lambda_1 + (s-1)\lambda_0$ pour $2 \leq s \leq n-1$ et $\lambda_1 + \lambda_{n-1} = \lambda - n$ (ces relations proviennent des identités $[Z_0, Z_{s-1}] = Z_s$ et $[Z_s, Z_{n-s}] = (-1)^n Z_n$) , on obtient une contradiction. D'où le théorème.

Corollaire 4. *Le rang d'une algèbre de Lie filiforme est au plus égal à 2.*

Démonstration. En effet les valeurs propres d'une dérivation diagonale non nulle vérifie le système linéaire :

$$\lambda_0 + \lambda_i = \lambda_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n-2$$

associé aux conditions $[Z_0, Z_i] = Z_{i+1}$ communes à toutes les algèbres filiformes de rang non nul. Ces racines déterminent donc un système linéaire formel à $n+1$ variables dont l'espace des solutions est au plus de dimension 3. Chacune de ces algèbres comportent une autre relation sur les crochets donnant une équation linéaire indépendante des précédentes. Le nouvel espace des solutions est de rang 2 au plus. Comme cette dimension correspond au rang de l'algèbre $\mathfrak{g}$, on en déduit le corollaire.

Remarque. On constate directement sur ce cas que le rang d'une algèbre de Lie nilpotente ne saurait être supérieur au nombre de ses générateurs.

Algèbres filiformes de rang 2.

Les seules algèbres filiformes de rang 2 sont, d'après le théorème 2, isomorphes à l'une des deux algèbres définies par :

$$1) \ \ [Z_0, Z_i] = Z_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n$$

$$2) \ \ [Z_0, Z_i] = Z_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n-1 \quad [Z_i, Z_{n-i}] = (-1)^i Z_n.$$

Bien entendu, tous les crochets non définis sont nuls. Pour chacune de ces deux algèbres on peut préciser un tore maximal de dérivations: pour la première loi il est engendré par les deux dérivations définies par:

$$f_1(Z_0) = 0 \ , \ f_1(Z_i) = Z_i \ \ et \ \ f_2(Z_0) = Z_0 \ , \ f_2(Z_i) = (n-i)Z_i \ , \ i = 1, \cdots, n$$

quant à la deuxième loi il est engendré par:

$$f_1(Z_0) = Z_0\ ,\ f_1(Z_i) = (i-1)Z_i\ ,\ 1 \leq i \leq n-1\ ,\ f_1(Z_n) = (n-2)Z_n$$

$$f_2(Z_0) = 0\ ,\ f_2(Z_i) = Z_i\ ,\ 1 \leq i \leq n-1\ ,\ f_2(Z_n) = 2Z_n.$$

Algèbres filiformes de rang 1

Ce sont donc les algèbres de type (ii), (iv) et (v) du théorème 2 telle qu'il existe i et j avec un paramètre différent de 0. Un tore maximal de dérivations est engendré dans les cas (ii) et (iv) par :

$$f(Z_0) = Z_0\ ,\ f(Z_i) = (i+r)Z_i\ \ 1 \leq i \leq n-1\ ,\ f(Z_n) = (n+2r)Z_n$$

et dans le cas (v) par :

$$f(Z_0) = 0\ ,\ f(Z_i) = Z_i\ ,\ 1 \leq i \leq n-1\ \ ,\ f(Z_n) = 2Z_n.$$

4 Algèbres de Lie caractéristiquement nilpotentes

4.1 Algèbres de Lie filiformes caractéristiquement nilpotentes

Dans [H2], l'un des auteurs définit la notion d'algèbre d'appui pour une algèbre de Lie filiforme vérifiant $gr(\mathfrak{g}) = L_n$ afin de caractériser dans cette classe d'algèbres de Lie celles qui sont caractéristiquement nilpotentes. Le théorème 2 permet d'étendre ces résultats à l'ensemble des algèbres de Lie filiformes.

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie filiforme non isomorphe à L_n ou à Q_n. Si l'algèbre graduée $gr(\mathfrak{g})$ est isomorphe à L_n, alors d'après le corollaire 1 on peut supposer $\mathfrak{g}$ définie par les relations :

$$[X_0, X_i] = X_{i+1}\ ,\ 1 \leq i \leq n-1\ ;\ [X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n-i-j} a_{ij}^k X_{i+j+k}.$$

Si $gr(\mathfrak{g})$ est isomorphe à Q_n, les relations sont :

$$[X_0, X_i] = X_{i+1}\ ,\ 1 \leq i \leq n-2$$

$$[X_i, X_{n-i}] = (-1)^i X_n\ ,\ 1 \leq i \leq n-1\ ;\ [X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{n-i-j} a_{ij}^k X_{i+j+k}.$$

Définition 3. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre filiforme telle que $gr(\mathfrak{g})$ soit isomorphe à L_n. On appelle algèbre d'appui de $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie filiforme définie par les crochets*

$$[X_0, X_i] = X_{i+1}\ ,\ 1 \leq i \leq n-1\ ;\ [X_i, X_j] = a_{ij}^r X_{i+j+r}$$

où r est le plus petit indice supérieur ou égal à 1 tel que $a_{ij}^k \neq 0$ pour certains (i,j).

Un tel indice existe car $\mathfrak{g}$ est supposée non isomorphe à L_n.

Définition 4. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de lie filiforme telle que $gr(\mathfrak{g})$ soit isomorphe à Q_n. L'algèbre d'appui de première espèce de $\mathfrak{g}$ est l'algèbre de Lie filiforme définie par :*

$$[X_0, X_i] = X_{i+1}\ \ 1 \leq i \leq n-2$$

$$[X_i, X_{n-i}] = (-1)^i X_n \quad 1 \leq i \leq n-1 \ , \ [X_i, X_j] = a_{ij}^r X_{i+j+r}$$

où r est le plus petit indice vérifiant $r \geq 1$ et $a_{ij}^r \neq 0$. L'algèbre d'appui de deuxième espèce de $\mathfrak{g}$ est l'algèbre filiforme définie par :

$$[X_0, X_i] = X_{i+1} \quad 1 \leq i \leq n-2$$

$$[X_i, X_{n-i}] = (-1)^i X_n \quad 1 \leq i \leq n-1 \ , \ [X_i, X_j] = a_{ij}^{n-i-j} X_n .$$

Remarquons qu'une algèbre de Lie non isomorphe à Q_n mais dont son algèbre graduée est isomorphe à Q_n admet toujours une algèbre d'appui (de première ou deuxième espèce) non isomorphe à Q_n.

Théorème 3. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de lie filiforme de dimension $n+1 \geq 7$. Pour que $\mathfrak{g}$ soit caractéristiquement nilpotente, il faut et il suffit que $\mathfrak{g}$ ne soit pas isomorphe à son (ou ses) algèbre d'appui.*

La démonstration est une conséquence du théorème 2.

4.2 Algèbres de Lie caractéristiquement nilpotentes dans la variété N_m

Soit N_m la variété des lois d'algèbres de Lie nilpotentes de dimension m. L'ensemble F_m des lois filiformes est un ouvert de N_m (N_m est une variété algébrique munie de sa topologie de Zariski). Chaque composante irréductible de F_m définit une composante dans N_m. Dans [H2], on montre que toute composante irréductible de F_m (pour $m \geq 8$) ne contenant pas l'algèbre Q_{m-1} contient un ouvert non vide de Zariski composé d'algèbres de Lie caractéristiquement nilpotentes. Nous allons ici généraliser ce résultat.

Théorème 4. *Supposons $m \geq 8$. Alors toute composante irréductible C de la variété F_m contient un ouvert non vide de Zariski dont les éléments sont des lois d'algèbres de Lie caractéristiquement nilpotentes.*

Démonstration. Elle est quelque peu analogue à celle du théorème 5 dans [H2] et découle des lemmes suivants :

Lemme 3. *L'ensemble des algèbres de Lie caractéristiquement nilpotentes de F_m est constructible (c'est-à-dire une réunion finie de sous ensembles localement fermés).*

Lemme 4 *Soient $m \geq 8$ et U un ouvert non vide de F_m. Alors U contient une loi d'algèbre de Lie caractéristiquement nilpotente.*

Démontration du lemme 3. La classification donnée au théorème 2 montre qu'il existe un nombre fini de sous groupes à 1 paramètre $\lambda_i : \mathbb{C}^* \longrightarrow GL(n+1)$ tels que le groupe d'automorphisme d'une algèbre de Lie filiforme admettant une dérivation semi simple contient un des $\lambda_i(\mathbb{C}^*)$ à une conjugaison près. Comme l'ensemble des points fixes $(N_m)^{\lambda_i(\mathbb{C}^*)}$ est fermé, la réunion des ensembles $GL(n+1)(N_m)^{\lambda_i(\mathbb{C}^*)}$ est constructible. Son complémentaire qui correspond à l'ensemble des lois caractéristiquement nilpotentes est aussi constructible.

Remarque. La démonstration du lemme 3 découle aussi d'un résultat beaucoup plus général du à H. Kraft et Ch. Riedtmann [K.R].

Démonstration du lemme 4. Dans [H2] on montre que si U contient une algèbre $\mathfrak{g}_0$ non caractéristiquement nilpotente telle que $gr(\mathfrak{g}_0) = L_m$, alors U contient aussi une algèbre caractéristiquement nilpotente. Soit $\mathfrak{g} \in U$ telle que son rang soit non nul et $gr(\mathfrak{g}) = Q_{m-1}$. D'après le théorème 2, $\mathfrak{g}$ est du type (iii), (iv), ou (v). Comme tout ouvert contenant la loi Q_m contient aussi une loi du type (v), par exemple la loi $C_{m+1}(\alpha_1, 0, \cdots, 0)$ avec $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ assez petit, nous pouvons nous restreindre aux seules algèbres $\mathfrak{g}$ du type (iv) ou (v).

1. Supposons $\mathfrak{g}$ du type (iv). Soit $\psi : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ une application bilinéaire alternée définie dans la base quasi adaptée $(Z_0, Z_1, \cdots, Z_{m-1})$ utilisée dans le théorème 2 par $\psi(Z_1, Z_2) = Z_{m-1}$. Alors ψ est un 2-cocycle pour la cohomologie de Chevalley de $\mathfrak{g}$ (cohomologie de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans $\mathfrak{g}$) et la loi $\mu_t = \mu + t\psi$ où μ est la loi de $\mathfrak{g}$ est une loi d'algèbre de Lie. On en déduit que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_t$ de loi μ_t est pour t suffisamment petit dans un voisinage de $\mathfrak{g}$. D'après le théorème 3, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_t$ est caractéristiquement nilpotente.

2. Si $\mathfrak{g}$ est du type (v), on utilise le cocycle ψ défini par $\psi(Z_1, Z_2) = Z_{n-2}$. Le raisonnement est analogue au précédent.

D'où le lemme.

Bibliographie

[A-G] Ancochea Bermudez, J.M, Goze, M.: Le rang du système linéaire des racines d'une algèbre de Lie résoluble rigide. Comm. in Algebra **20** (3), (1992), 875-887

[B] Benoist, Y.: Une nilvariété non affine. Preprint Paris (1992)

[C] Carles, R.: Sur les algèbres de Lie caractéristiquement nilpotentes. Preprint Univ. Poitiers (1984)

[Di] Dixmier, J.: Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents III. Canad. J. Math. **10** (1958) 321-348

[D-L] Dixmier, J., Lister, W.G.: Derivations of nilpotent Lie algebras. Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957) 155-158

[Dy] Dyer, J.L.: A nilpotent Lie algebra with nilpotent automorphism group. Bull.Amer. Math.Soc. **76** (1970) 52-56

[F] Favre, G.: Une algèbre de Lie caractéristiquement nilpotente de dimension 7. C.R.A.Sc. Paris, Série A, **274** (1972) 1338-1339

[H1] Hakimjanov, Y.: Algèbres de Lie caractéristiquement nilpotentes. Math.Sb. **181** (1990) 642-655 et Math. USSR. **70**,1 (1991)

[H2] Hakimjanov, Y.: Variétés des lois d'algèbres de Lie nilpotentes. Geom.Dedicata **40** (1991) 269-295

[H-R] Kraft, H.P, Riedtmann, Ch.: Geometry of representations of quivers. In Representations of algebras (Durham 1985). London Math. Soc. Lecture Notes **116**, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New-York 1986.

[L-T] Leger, G., Tôgô, S.: Caracteristically nilpotent Lie algebras. Duke Math. J. **26** (1959) 623-628

[L] Luks, M.: What is the typical nilpotent Lie algebra? in Computers in non associative rings and algebras. Acad.Press, New-York p 189-207, 1977.

[M] Morozov, V.: Classification of nilpotent Lie algebras of sixth order. Izv.Vyssh. U.Zaved. Mat. **4**(5) (1958) 161-171

[Mo] Mostow, G.D.: Fully reductible subgroups of algebraic groups. Amer.J.Math. **78** (1956)

[V] Vergne, M.: Cohomologie des algèbres de Lie nilpotentes. Application à l'étude de la variété des algèbres de Lie nilpotentes. Bull.Soc.Math.France **98** (1970) 81-116

This article was processed by the author
using the Springer-Verlag TEX PJourlg macro package 1991.

(Reçu le 29 mars 1993)