Arch. Math., Vol. 53, 134–140 (1989) 0003-889X/89/5302-0134 $ 2.90/0

Autour des algèbres de Bernstein

Par

MARÍA TERESA ALCALDE, RODOLFO BAEZA et CÉSAR BURGUEÑO [1])

Introduction. Dans un article paru à ce même journal A. Wörz-Busekros [5] montre qu'une K-algèbre de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus V$ est une algèbre de Jordan si et seulement si $V^2 = \langle 0 \rangle$ plus cinq rélations. Ici on montre que deux de ces rélations sont valables dans toute algèbre de Bernstein et que les trois autres dècoulent des relations $V^2 = \langle 0 \rangle$ et $v(vU) = \langle 0 \rangle$ pour tout v dans V.

En 1975 P. Holgate [2] introduit la notion d'algèbre de Bernstein orthogonale. Ici on reprend cette notion et l'on montre que si l'algèbre de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus V$ n'est pas orthogonale alors $r := \dim_K U \geqq 3$ et $s := \dim_K V \geqq 2$. De plus on montre qu'il existe une K-algèbre de Bernstein non orthogonale du type $(4, 2)$.

1. Préliminaires. Soient K un corps de caractéristique différente de deux et A une K-algèbre commutative non nécessairement associative. On appelle A une *K-algèbre de Bernstein* s'il existe un homomorphisme non nul d'algèbres, $w: A \to K$ tel que tous les éléments de A verifient l'equation

$$(1.1) \qquad (x^2)^2 = w(x)^2 x^2.$$

On sait (c.f. [3], pag. 207) que par rapport à un élément idempotent e (lequel existe toujours), l'algèbre de Bernstein A peut se metre sous la forme

$$(1.2) \qquad A = Ke \oplus U \oplus V$$

où $U := \{ey \mid y \in \operatorname{Ker} w\}$ et $V := \{x \in A \mid ex = 0\}$.

La dimension du sous-espace U de A est un invariant de A; on peut donc associer à A une paire d'entiers $(r + 1, s)$ où $r := \dim_K U$, $s := \dim_K V$ et $1 + r + s = n = \dim_K A$. On dit alors que l'algèbre A est de *type* $(r + 1, s)$.

Une K-algèbre de Bernstein est *triviale* si $(\operatorname{Ker} w)^2 = (U \oplus V)^2 = \langle 0 \rangle$. A. Wörz-Busekros [4] montre qu'il existe, sauf isomorphisme, une unique algèbre de Bernstein triviale pour chaque type $(r + 1, s)$. En plus elle montre que dans ce cas on a

$$A \cong K \oplus K^r \oplus K^s = \{(\alpha, x, y) \mid \alpha \in K,\ x \in K^r,\ y \in K^s\}$$

[1]) Travail subventionné par Dirección de Investigación, Universidad de La Frontera, Temuco. Chile et CONICYT.

et le prodiut est donné par

$$(1.3) \qquad (\alpha, x_1, y_1)(\beta, x_2, y_2) := (\alpha\beta, \tfrac{1}{2}(\alpha x_2 + \beta x_1), 0)$$

pour tous $\alpha, \beta \in K$; $x_i \in K^r$; $y_i \in K^s$; $i = 1, 2$.

Une K-algèbre commutative A est une algèbre de *Jordan* si l'identité

$$(1.4) \qquad x^2(yx) = (x^2 y)x$$

est vraire quels que soient x, y dans A.

Des relations entre ces algèbres on été établies par A. Wörz-Busekros [5], à savoir

Théorème 1. *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K-algèbre de Bernstein. A est une algèbre de Jordan si et seulement si les identités suivantes sont valables pour tous les $u_i \in U$, $v_i \in V$, $i = 1, 2$:*

$$(1.5) \qquad v_1 v_2 = 0$$

$$(1.6) \qquad (u_1 v_1) v_2 + (u_1 v_2) v_1 = 0$$

$$(1.7) \qquad (u_1^2 u_2) v_1 + 2((u_1 v_1) u_2) u_1 = 0$$

$$(1.8) \qquad ((u_1 v_1) v_2) v_1 = 0$$

$$(1.9) \qquad (u_1^2 u_2) u_1 = 0$$

$$(1.10) \qquad ((u_1 v_1) v_2) u_1 = 0.$$

Corollaire 2. *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K-algèbre de Bernstein. Si $V^2 = \langle 0 \rangle$ et $(UV)V = \langle 0 \rangle$, alors A est une algèbre de Jordan.*

Dans la section suivante on montrera que la condition nécessaire du Théorème 1 peut être réduite.

Une K-algèbre de Bernstein $A = Ke \oplus U \oplus V$ est *orthogonale* si $U^3 = \langle 0 \rangle$.

2. Algèbres de Jordan. Pour démontrer le Théorème 5 on aura besoin des lemmes suivants.

Lemme 3. *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K-algèbre de Bernstein. Alors pour tout $u_i \in U$, $v_i \in V$, $i = 1, 2$, on a*

$$(2.1) \qquad u_1^2 u_2 + 2(u_1 u_2) u_1 = 0$$

$$(2.2) \qquad u_1(u_2 v_1) + u_2(u_1 v_1) = 0$$

$$(2.3) \qquad (u_1 v_1)(u_1 v_2) = 0$$

$$(2.4) \qquad u_1(v_2(u_1 v_1)) = 0$$

$$(2.5) \qquad (u_1^2 u_2) u_1 = 0.$$

En effet, les relations (2.1), (2.2) et (2.3) correspondent aux relations (3.1), (3.2) et (3.7) du Lemme 2 (c.f. [5]). Pour démontrer (2.4) on remplace v_1 par v_2 et u_2 par $u_1 v_1$ dans (2.2) et on obtient $u_1((u_1 v_1) v_2) + (u_1 v_1)(u_1 v_2) = 0$, en utilisant (2.3), il en résulte (2.4). En faisant $v_1 = u_1^2$ dans (2.2), on a $u_1(u_2 u_1^2) + u_2(u_1 u_1^2) = 0$, d'où $(u_1^2 u_2) u_1 = 0$ donc (2.5).

Lemme 4. *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K-algèbre de Bernstein telle que $v(vu) = 0 \; \forall u \in U$, $v \in V$. Alors les relations suivantes sont valables pour tous les $u_i \in U$, $v_i \in V$, $i = 1, 2$*

$$(u_1 v_1) v_2 + (u_1 v_2) v_1 = 0 \tag{2.6}$$

$$(u_1^2 u_2) v_1 + 2((u_1 v_1) u_2) u_1 = 0 \tag{2.7}$$

$$((u_1 v_1) v_2) v_1 = 0. \tag{2.8}$$

En effet, dans l'équation $v(vu) = 0$ on prend $v = v_1 + v_2$ et on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= (v_1 + v_2)((v_1 + v_2) u) = v_1(v_1 u) + v_1(v_2 u) + v_2(v_1 u) + v_2(v_2 u) \\ &= v_1(v_2 u) + v_2(v_1 u), \end{aligned}$$

on a donc démontré (2.6). Pour avoir (2.7) on utilise successivement (2.6), (2.2) et (2.1), en effet

$$\begin{aligned} (u_1^2 u_2) v_1 + 2\;((u_1 v_1) u_2) u_1 &= -\,u_1^2(u_2 v_1) + 2((u_1 v_1) u_2) u_1 \\ &= -\,u_1^2(u_2 v_1) - 2((u_2 v_1) u_1) u_1 = 0. \end{aligned}$$

En multipliant la relation (2.6) par v_1, on a $((u_1 v_1) v_2) v_1 = -\,((u_1 v_2) v_1) v_1 = 0$, ce qui achève la démonstration du lemme.

On a donc le

Théorème 5. *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K-algèbre de Bernstein. Alors A est une algèbre de Jordan si et seulement si $V^2 = \langle 0 \rangle$ et $v(vu) = 0$ pour tous les $u \in U$, $v \in V$.*

En effet, supposons $V^2 = \langle 0 \rangle$ et $v(vu) = 0$ pour tous les $u \in U$, $v \in V$. En tenant compte du Théorème 1, les Lemmes 3 et 4 impliquent que A est une algèbre de Jordan.

Réciproquement, en utilisant de nouveau le Théorème 1, il suffit de démontrer que $v(vu) = 0$ pour tout $u \in U$, $v \in V$. Pour cela, on prend $v_1 = v_2 = v$, $u_1 = u$ dans (1.6) et on a $2(uv)v = 0$ pour tout $u \in U$, $v \in V$, donc $v(vu) = 0$.

3. Orthogonalité. Soient $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K-algèbre de Bernstein du type $(r + 1, s)$ et $L_{u^2}\colon U \to UV$ définie par $L_{u^2}(x) = u^2 x$ avec $u \in U$ fixe, $u \neq 0$. Cette application est un homomorphisme d'espaces vectoriels et on a $L_{u^2}(u) = u^3 = 0$ donc $\operatorname{Ker} L_{u^2} \neq \{0\}$. On pose $\eta_u := \dim_K \operatorname{Ker} L_{u^2} \geqq 1$, $\varrho_u := \dim_K L_{u^2}(U) \leqq r - 1$. Si $x \in L_{u^2}(U)$ alors il existe u' dans U telle que $x = u^2 u'$, on a $L_{u^2}(x) = u^2(u^2 u') = -\,2u(u(u^2 u')) = 4u(4u(u(uu')))$ (on a utilisé deux fois la relation (2.1)), donc $L_{u^2}(x) = 0$ car $u(uv) = 0$ est toujours valable dans une algèbre de Bernstein. Ceci entraîne que $L_{u^2}(U)$ est un sous-espace vectoriel de $\operatorname{Ker} L_{u^2}$, donc $\eta_u \geqq \varrho_u$. Soit $t_u := \eta_u - \varrho_u$, alors $\dim U = r = 2\varrho_u + t_u$.

Théorème 6. *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K-algèbre de Bernstein. A est orthogonale si et seulement si $u^2 U = \langle 0 \rangle$ quelque soit u dans U.*

En effet, supposons que $u^2 U = \langle 0 \rangle$, alors $\varrho_u = 0$, c'est à dire $L_{u^2}(U) = 0$ quelque soit u dans U. On a $0 = (u_2 + u_3)^2 u_1 = u_2^2 u_1 + 2(u_2 u_3) u_1 + u_3^2 u_1$ ce qui entraîne $u_1(u_2 u_3) = 0$ quelque soit u_1, u_2, u_3 dans U, donc A est orthogonale.

Corollaire 7. *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ une K-algèbre de Bernstein. Si A n'est pas orthogonale, on a $r := \dim_K U \geqq 3$ et $s := \dim_K V \geqq 2$.*

En effet, si A n'est pas orthogonal, par le théorème précédent il existe u dans U telle que $\operatorname{Ker} L_{u^2} \neq U$, c'est à dire $\eta_u < r$. On a $r = \eta_u + \varrho_u \leqq 2\eta_u$, donc $\eta_u \geqq \frac{r}{2}$. De plus $\eta_u > \frac{r}{2}$, car $\eta_u = \frac{r}{2}$ entraîne $\varrho_u = \eta_u = \frac{r}{2}$, c'est à dire $\operatorname{Ker} L_{u^2} = L_{u^2}(U)$, donc l'élément u appartient à $L_{u^2}(U)$, alors il existe $u' \in U$ telle que $u^2 u' = u$ et on a $u^2 = (u^2 u')u = (-2u(uu'))u = -2u(u(uu')) = 0$, donc $L_{u^2} = 0$, ce qui revient à dire $\operatorname{Ker} L_{u^2} = U$, contradiction. C'est à dire on a demontré que l'entier η_u vérifie la relation $\frac{r}{2} < \eta_u < r$.

Si r est impair de la forme $r = 2k + 1$ avec $0 \leqq k \in \mathbb{Z}$, alors $\frac{2k+1}{2} < \eta_u < 2k + 1$, donc $k + 1 \leqq \eta_u < 2k + 1$, c'est à dire η_u peut prendre $k = \frac{r-1}{2}$ valeurs possibles. Comme $\eta_u \geqq 1$, on doit avoir $k \geqq 1$ et alors $\frac{r-1}{2} \geqq 1$ d'où $r \geqq 3$. Si r est pair, de façon analogue on montre que $r \geqq 4$.

Pour montrer que $s \geqq 2$ on considère un élément $u_1 \in U$ tel que $u^2 u_1 \neq 0$. Les éléments u^2 et uu_1 sont linéairement indépendents dans V. En effet, soit $\alpha u^2 + \beta u u_1 = 0$ avec $\alpha, \beta \in K$, si $\beta \neq 0$ alors $uu_1 = -\frac{\alpha}{\beta} u^2$ et $u^2 u_1 = -2u(uu_1) = \frac{2\alpha}{\beta} u^3 = 0$, donc $\beta = 0$. Comme $\operatorname{Ker} L_{u^2} \neq U$, on a $u^2 \neq 0$, alors $\alpha u^2 = 0$ entraîne $\alpha = 0$. En conséquence $s := \dim_K V \geqq 2$.

Corollaire 8. *Il existe une K-algèbre de Bernstein non orthogonale du type* (4, 2).

En effet, soit $A = Ke \oplus U \oplus V$, avec $\dim_K U = 3$ et $\dim_K V = 2$. Comme A n'est pas orthogonale alors le Théorème 6 entraîne qu'il existe $u_1 \in U$ tel que $\operatorname{Ker} L_{u_1^2} \subsetneqq U$. Tenant compte que $\operatorname{Ker} L_{u_1^2} \supsetneqq L_{u_1^2}(U)$ (car $u_1 \in \operatorname{Ker} L_{u_1^2} \backslash L_{u_1^2}(U)$), on a $\eta_{u_1} = 2$ et $\varrho_{u_1} = 1$. Soit $L_{u_1^2}(U) = \langle u_2 \rangle$ alors $\operatorname{Ker} L_{u_1^2} = \langle u_1, u_2 \rangle$, si on désigne par $\langle u_3 \rangle$ le complément du $\operatorname{Ker} L_{u_1^2}$ dans U, on a $U = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ avec $u_1^2 u_3 = u_2$. Comme $u_1^2 u_3 = u_2 \neq 0$, alors $v_1 := u_1^2$ et $v_2 := u_1 u_3$ sont linéairement indépendents dans V, donc $\{v_1, v_2\}$ est une base de V.

Les produits dans A sont donnés par

$$\begin{aligned}
u_1^2 &= v_1 \\
u_1 u_3 &= v_2 \\
u_1 u_2 &= u_1(u_1^2 u_3) = -2u_1(u_1(u_1 u_3)) = -2u_1(u_1 v_2) = 0 \\
u_1 v_1 &= u_1 u_1^2 = u_1^3 = 0 \\
u_1 v_2 &= u_1(u_1 u_3) = -\tfrac{1}{2} u_1^2 u_3 = -\tfrac{1}{2} u_2 \\
u_3^2 &= a v_1 + b v_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3 u_2 &= u_3(u_1^2 u_3) = 0\\
u_3 v_1 &= u_3 u_1^2 = u_2\\
u_3 v_2 &= u_3(u_3 u_1) = -\frac{1}{2}\, u_3^2 u_1 = -\frac{1}{2}(a v_1 + b v_2) u_1 = \frac{b}{4} u_2\\
u_2^2 &= (u_1^2 u_3)^2 = (u_3 v_1)(u_3 v_1) = 0\\
u_2 v_1 &= u_2 u_1^2 = -\,2 u_1(u_1 u_2) = 0\\
u_2 v_2 &= (u_1^2 u_3)(u_1 u_3) = -\tfrac{1}{2} u_3^2(u_1 v_1) = 0\\
v_1^2 &= (u_1^2)^2 = 0\\
v_1 v_2 &= u_1^2(u_1 u_3) = c u_2\\
v_2^2 &= d u_2
\end{aligned}$$

avec a, b, c, d dans K. Pour montrer que $v_1 v_2$ et v_2^2 n'ont pas de composante selon u_1 et u_3, il suffit de multiplier ces éléments par u_1 et utiliser les relations $UV^2 = \langle 0\rangle$, $u_1 u_2 = 0$ et le fait que $\{v_1, v_2\}$ est libre. De plus les coefficients a et b son liés par la relation $a = -\left(\frac{b}{2}\right)^2$, car $0 = u_3^3 = u_3(a v_1 + b v_2) = a u_2 + \frac{b^2}{4} u_2 = \left(a + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) u_2$, donc on a $u_3^2 = -\frac{b^2}{4} v_1 + b v_2$.

Pour finir, on imposse à l'algèbre A la condition de Bernstein $(x^2)^2 = w(x)^2 x^2$.

Soit $x = \alpha_1 e + \alpha_2 u_1 + \alpha_3 u_2 + \alpha_4 u_3 + \alpha_5 v_1 + \alpha_6 v_2$, $\alpha_i \in K$, $i = 1, \ldots, 6$, un élément quelconque de A. D'une part on a

$$\begin{aligned}
x^2 &= \alpha_1^2 e + \alpha_2^2 v_1 + \alpha_4^2\left(-\frac{b^2}{4} v_1 + b v_2\right) + \alpha_6^2 d u_2 + \alpha_1\alpha_2 u_1 + \alpha_1\alpha_4 u_3\\
&\quad + \alpha_1\alpha_3 u_2 + 2\left(\alpha_2\alpha_4 v_2 - \frac{1}{2}\alpha_2\alpha_6 u_2 + \alpha_4\alpha_5 u_2 + \frac{b}{4}\alpha_4\alpha_6 u_2 + \alpha_5\alpha_6 c u_2\right)\\
&= \alpha_1^2 e + \alpha_1\alpha_2 u_1 + \alpha_1\alpha_4 u_3 + \left(\alpha_6^2 d + \alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_6 + 2\alpha_4\alpha_5 + \frac{b}{4}\alpha_4\alpha_6\right.\\
&\quad \left. + 2c\alpha_5\alpha_6\right) u_2 + \left(\alpha_2^2 - \frac{b^2}{4}\alpha_4^2\right) v_1 + (b\alpha_4^2 + 2\alpha_2\alpha_4) v_2.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\begin{aligned}
(x^2)^2 &= \alpha_1^4 e + \alpha_1^3\alpha_2 u_1 + \alpha_1^3\alpha_4 u_3 + \left[d(b\alpha_4^2 + 2\alpha_2\alpha_4)^2 + \alpha_1^2\left(\alpha_6^2 d + \alpha_1\alpha_3\right.\right.\\
&\quad \left. - \alpha_2\alpha_6 + 2\alpha_4\alpha_5 + \frac{b}{2}\alpha_4\alpha_6 + 2c\alpha_5\alpha_6\right) - \alpha_1\alpha_2(b\alpha_4^2 + 2\alpha_2\alpha_4)\\
&\quad + 2\alpha_1\alpha_4\left(\alpha_2^2 - \frac{b^2}{4}\alpha_4^2\right) + \frac{b}{2}\alpha_1\alpha_4(b\alpha_4^2 + 2\alpha_2\alpha_4) + 2c\left(\alpha_2^2 - \frac{b^2}{4}\alpha_4^2\right)\\
&\quad \left.\cdot (b\alpha_4^2 + 2\alpha_2\alpha_4)\right] u_2 + \left(\alpha_1^2\alpha_2^2 - \frac{b^2}{4}\alpha_1^2\alpha_4^2\right) v_1 + (b\alpha_1^2\alpha_4^2 + 2\alpha_1^2\alpha_2\alpha_4) v_2.
\end{aligned}$$

Comme l'on a que $w(x) = \alpha_1$ on voit que l'algèbre A est de Bernstein si et seulement si pour tout $\alpha_i \in K$, $i = 1, \ldots, 6$, l'égalité suivante est vérifiée:

$$d(b\alpha_4^2 + 2\alpha_2\alpha_4)^2 - \alpha_1\alpha_2(b\alpha_4^2 + 2\alpha_2\alpha_4) + 2\alpha_1\alpha_4\left(\alpha_2^2 - \frac{b^2}{4}\alpha_4^2\right)$$
$$+ \frac{b}{2}\alpha_1\alpha_4(b\alpha_4^2 + 2\alpha_2\alpha_4) + 2c\left(\alpha_2^2 - \frac{b^2}{4}\alpha_4^2\right)(b\alpha_4^2 + 2\alpha_2\alpha_4) = 0.$$

En ordonnant le membre de gauche selon les puissances de α_4 on obtient

$$\alpha_4^4\left[db^2 - \frac{b^3c}{2}\right] + \alpha_4^3[4bd\alpha_2 - b^2c\alpha_2] + \alpha_4^2[4d\alpha_2^2 + 2bc\alpha_2^2] + 4\alpha_4c\alpha_2^3 = 0$$

pour tout α_2, α_4 dans K. Donc les equations suivantes doivent être verifieés, pour tout α_2 dans K

$$db^2 - \frac{b^3c}{2} = 0,$$
$$(4bd - b^2c)\alpha_2 = 0,$$
$$(4d + 2bc)\alpha_2^2 = 0,$$
$$4c\alpha_2^2 = 0,$$

ce qui donne $c = d = 0$. Alors la loi de multiplication dans A est donnée par

	e	u_1	u_2	u_3	v_1	v_2
e	e	$\frac{1}{2}u_1$	$\frac{1}{2}u_2$	$\frac{1}{2}u_3$	0	0
u_1	$\frac{1}{2}u_1$	v_1	0	v_2	0	$-\frac{1}{2}u_2$
u_2	$\frac{1}{2}u_2$	0	0	0	0	0
u_3	$\frac{1}{2}u_3$	v_2	0	$-\frac{b^2}{4}v_1 + bv_2$	u_2	$\frac{b}{4}u_2$
v_1	0	0	0	u_2	0	0
v_2	0	$-\frac{1}{2}u_2$	0	$\frac{b}{4}u_2$	0	0

où b est un élément quelconque dans K. On observe que pour cette algèbre, on a $u_3(u_1u_1) = u_3v_1 = u_2 \neq 0$, c'est à dire A n'est pas orthogonale pour aucun b dans K.

Bibliographie

[1] M. T. Alcalde, C. Burgueño, A. Labra et A. Micali, Sur les algèbres de Bernstein. London Math. Soc., sous presse.

[2] P. Holgate, Genetic algebras satisfying Bernstein's stationary principle. J. London Math. Soc. (2) **9**, 613–623 (1975).

[3] A. WÖRZ-BUSEKROS, Algebras in genetics. Lecture Notes in Biomath. **36**, Berlin-Heidelberg-New York 1980.
[4] A. WÖRZ-BUSEKROS, Further remarks on Bernstein algebras. London Math. Soc., sous presse.
[5] A. WÖRZ-BUSEKROS, Bernstein algebras. Arch. Math. **48**, 388–398 (1987).

Eingegangen am 28. 1. 1988

Anschrift der Autoren:

M. T. Alcalde, R. Baeza, C. Burgueño
Departamento de Matemática y Estadística
Universidad de La Frontera
Casilla 54-D
Temuco–Chile