SUR LES ALGÈBRES DE BERNSTEIN

M. T. ALCALDE, C. BURGUEÑO, A. LABRA, *et* A. MICALI

[Received 2 January 1985—Revised 3 December 1987]

Le but de cet article est de revoir les algèbres de Bernstein au point de vue structure et de décrire les dérivations et automorphismes de telles algèbres aussi bien en caractéristique 2 qu'en caractéristique différent de 2. Les résultats obtenus sont consignés dans les pages qui suivent.

Ce que l'on appelle aujourd'hui les algèbres de Bernstein ce sont des objets nés des travaux de Serge Bernstein (cf. [**1, 2**]) concernant le principe de stationarité en Genètique. Ces travaux sont restés sans suite, pendant un demi-siècle et repris par Yu. I. Lyubich (cf. [**8**]) et puis d'un point de vue algèbrique par P. Holgate en 1975 (cf. [**7**]). Compte tenu des ces travaux, Angelika Wörz-Busekros a fait une étude systematique des algèbres de Bernstein sur un corps de caractéristique différente de 2 (cf. [**13**, chapitre 9]), en y includant la classifications de ces algèbres en dimension $\leqslant 3$. C'est cette étude que nous reprenons ici afin d'étudier dérivations et automorphismes.

1. *Préliminaires*

Soient K un anneau commutatif à élément unité, A une K-algèbre commutative non associative et $\omega: A \to K$ une *pondération* de A, i.e. un morphisme surjectif de K-algèbres, appelé aussi *poids* ou *fonction poids* de l'algèbre A. On dira aussi que le couple (A, ω) est une *K-algèbre ponderée.* Un *morphisme* d'algèbres ponderées f: $(A, \omega) \to (A', \omega')$ est un morphisme de K-algèbres f: $A \to A'$ vérifiant $\omega' \circ f = \omega$. Si (A, ω) est une algèbre ponderée, il existe un élément e dans A tel que $\omega(e) = 1$ donc la décomposition en somme directe de K-modules $A = Ke \oplus \mathrm{Ker}(\omega)$. De plus, $\mathrm{Ker}(\omega)$ est un idéal de A. Si, maintenant, f: $(A, \omega) \to (A', \omega')$ est un morphisme d'algèbres ponderées, la condition $\omega' \circ f = \omega$ entraîne $f(\mathrm{Ker}(\omega)) \subset \mathrm{Ker}(\omega')$ donc, par passage aux quotients, il existe un isomorphisme unique de K-algèbres $\bar{f}$: $Ke \xrightarrow{\sim} Ke'$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A' \\ \downarrow & \bar{f} & \downarrow \\ Ke & \xrightarrow{\sim} & Ke' \end{array}$$

où les flèches verticales sont canoniques. Ainsi, dans une catégorie d'algèbres pondérées, la composante Ke de ces algèbres est unique, à isomorphisme près. Ceci est donc un *invariant de la catégorie.*

Subventionné par UNESCO N° 2126-SC et par le Departamento de Investigación y Bibliotecas, Universidad de Chile, Proyecto E-1995-8413.

A.M.S. (1980) subject classification: 17D92.

On dira qu'une K-algèbre ponderée (A, ω) est une algèbre de Bernstein si pour tout élément x de A on a $(x^2)^2 = \omega(x)^2x^2$. Plus géneralement, soient (A, ω) une algèbre ponderée et h: $A \to A$ une application quadratique, i.e. $h(\lambda x) = \lambda^2 h(x)$ pour tout λ dans K et pour tout x dans A et l'application $A \times A \to A$ définie par

$$(x, y) \mapsto h(x+y) - h(x) - h(y)$$

est K-bilinèaire, nécessairement symétrique. On dira maintenant que le triplet (A, ω, h) est une *algèbre de Bernstein* si pour tout x dans A on a $h(h(x)) = h(\omega(x)x)$, ou encore, $h(h(x)) = \omega(x)^2h(x)$. La première définition donné ci-dessus concerne un cas particulier d'algèbres de Bernstein dans lequel l'application quadratique h: $A \to A$ est définie par $x \mapsto x^2$. Ce papier traitera de ce cas particulier d'algèbres de Bernstein, que nous noterons, tout simplement, (A, ω).

EXAMPLE 1.1. Soit (A, ω) une algèbre ponderée et soit h: $A \to A$ l'application quadratique définie par $x \mapsto \omega(x)x$ dont l'application K-bilinèaire symétrique associée est

$$A \times A \to A, \quad (x, y) \mapsto \omega(x)y + \omega(y)x.$$

Il est clair que (A, ω, h) est une algèbre de Bernstein car $h(h(x)) = \omega(x)^2h(x)$ pour tout x dans A.

Dans la suite de cet article, le mot algèbre veut toujours dire algèbre commutative non nécessairement associative et de dimension finie sur un corps commutatif donné. De plus, pour tout corps commutatif K, on notera K^+ le groupe abélien additif soujacent à K et K^* le groupe abélien multiplicatif formé des élément inversibles de K et pour un K-espace vectoriel V, notons $\mathrm{GL}_K(V)$ le groupe linéaire de V.

2. *Structure des algèbres de Bernstein*

Soient K un corps commutatif et (A, ω) une algèbre de Bernstein. Il existe un idempotent non nul e de A, donc la décomposition en somme directe d'espaces vectoriels $A = Ke \oplus \mathrm{Ker}(\omega)$. De plus, Ke est une sous-algèbre de A et $\mathrm{Ker}(\omega)$ est un idéal de A. On a:

PROPOSITION 2.1. *Soient K un corps commutatif infini et (A, ω) une K-algèbre de Bernstein. Quels que soient x, y, z et t dans A, on a les relations suivantes:*

(i) $8((xy)(zt) + (xz)(yt) + (xt)(yz))$
$$= 4(\omega(xy)zt + \omega(zt)xy + \omega(xz)yt + \omega(yt)xz + \omega(xt)yz + \omega(yz)xt);$$
(ii) $4x^2(yz) + 8(xy)(xz) = 4\omega(xz)xy + 2\omega(yz)x^2 + 2\omega(x^2)yz + 4\omega(xy)xz;$

(iii) $4(xy)^2 + 2x^2y^2 = 4\omega(xy)xy + \omega(x^2)y^2 + \omega(y^2)x^2;$

(iv) $4x^2(xy) = 2\omega(x^2)xy + 2\omega(xy)x^2.$

En effet, on sait que pour tout x dans A on a $(x^2)^2 = \omega(x)^2x^2$ et il suffit de polariser cette relation.

NOTE 2.2. La proposition ci-dessus est encore vraie si K est un anneau commutatif et intègre à élément unité ayant une infinité d'éléments (cf. [**4**, chapitre 4, § 2, N° 5]).

COROLLAIRE 2.3. *Soient K un corps commutatif infini et* (A, ω) *une K-algèbre de Bernstein. Si la caractéristique de K est différente de* 2, *la relation* (i) *entraîne les relations* (ii) *et* (iii) *et quels que soient* x, y, z, t *dans* A, *on a:*

$$\text{(i)}' \quad (xy)(zt) + (xz)(yt) + (xt)(yz) = \tfrac{1}{2}(\omega(xy)zt + \omega(zt)xy + \omega(xz)yt + \omega(yt)xz + \omega(xt)yz + \omega(yz)xt).$$

Si, de plus, la caractéristique de K est aussi différente de 3, *alors la relation* (i) *entraîne* (iv).

Le corollaire résulte immédiatement par un choix convenable de x, y, z et t dans (i).

On voit ainsi qu'en caractéristique différente de 2 et de 3 et pour des algèbres de Bernstein sur un corps infini, la relation (i)′ suffit pour les définir. En effet, si l'on y fait $x = y = z = t$, on a

$$(x^2)^2 = \omega(x)^2x^2 \quad \text{pour tout } x.$$

Soient K un corps infini de caractéristique 2, (A, ω) une K-algèbre de Bernstein, e un idempotent de A vérifiant $\omega(e) = 1$ et $A = Ke \oplus \operatorname{Ker}(\omega)$ la décomposition de A relativement à cet idempotent. La proposition 2.1 nous dit alors que quels que soient x et y dans A on a

$$\omega(x^2)y^2 = \omega(y^2)x^2$$

donc $x^2 = \omega(x^2)e$ pour tout x dans A. Cette relation nous sera utile, plus loin dans le calcul des dérivations en caractéristique 2.

Supposons maintenant que K soit un corps infini de caractéristique 3 et soient (A, ω) une K-algèbre de Bernstein, e un idempotent de A vérifiant $\omega(e) = 1$ et $A = Ke \oplus \operatorname{Ker}(\omega)$ la décomposition de A relativement à cet idempotent. Dans ce cas d'aprés la proposition 2.1, on a les relations:

$$\text{(i)}'' \quad (xy)(zt) + (xz)(yt) + (xt)(yz) + \omega(xy)zt + \omega(zt)xy + \omega(xz)yt + \omega(yt)xz + \omega(xt)yz + \omega(yz)xt = 0,$$

quels que soient x, y, z et t dans A;

(iv)″ $x^2(xy) + \omega(x^2)xy + \omega(xy)x^2 = 0$, quels que soient x et y dans A.

De plus, il est facile de voir que la condition (i)″ n'entraîne pas (iv)″. Ainsi, en caractéristique 3 il nous reste deux des quatre relations écrites dans la proposition 2.1 alors que, en caractéristique 2, il nous en reste une seule.

THÉORÈME 2.4. *Soient K un corps infini de caractéristique différente de* 2, (A, ω) *une K-algèbre de Bernstein et e un idempotent non trivial de A. Alors, l'idéal* $\operatorname{Ker}(\omega)$ *de A se décompose en la somme directe de deux sous-espaces,* $\operatorname{Ker}(\omega) = U \oplus V$, *et cette décomposition depend du choix de l'idempotent e. De plus, on a:*

(i) *pour tout* x *dans* U, $ex = \frac{1}{2}x$;

(ii) *pour tout* x *dans* V, $ex = 0$;

(iii) *quels que soient x, y et z dans U, on a l'identité de Jacobi*

$$(xy)z+(yz)x+(zx)y=0;$$

(iv) *quels que soient x et y dans U et z dans V, on a*

$$x(yz)+y(xz)=0;$$

(v) *quels que soient x, y et z dans* $\mathrm{Ker}(\omega)$ *et pour tout t dans A, on a*

$$(xy)(zt)+(xz)(yt)+(xt)(yz)=0;$$

(vi) $U^2\subset V$, $\quad UV\subset U$, $\quad V^2\subset U$ *et* $\quad UV^2=0$.

En effet considérons l'application K-linéaire L: $\mathrm{Ker}(\omega)\to\mathrm{Ker}(\omega)$ définie par $x\mapsto ex$. L'identité (i) de la proposition 2.1, si la caractéristique de K est différente de 2 et 3 ou l'identité (iv) de la même proposition, si la caractéristique de K est égale à 3, nous donnent $e(ex)=\frac{1}{2}ex$ pour tout x dans $\mathrm{Ker}(\omega)$ donc $L\circ L=\frac{1}{2}L$. Ceci nous montre que, si l'on pose $U=\mathrm{Im}(L)$ et $V=\mathrm{Ker}(L)$, on a la décomposition en somme directe de sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}(\omega)=U\oplus V$. Le reste de la démonstration suit comme dans **[13]** (voir démonstration du théorème 9.6). Pour ce qui est de la dependance de la décomposition de A vis-à-vis du choix de l'idempotent e, voir [**13**, Lemma 9.9].

NOTE 2.5. On observe ici que quels que soient x et y dans $\mathrm{Ker}(\omega)$, on a, d'après l'identité (iii) de la proposition 2.1, $2(xy)^2+x^2y^2=0$, à condition que la caractéristique de K soit différente de 2. Donc, pour tout x dans U et pour tout y dans V, on a $(xy)^2$ dans V et x^2y^2 dans U ce qui entraîne que $(xy)^2=0$ et $x^2y^2=0$. Ceci repond à une question posée dans **[13]** (voir la remarque à la fin de la démonstration du théorème 9.6).

NOTE 2.6. On sait que si (A,ω) est une k-algèbre de Bernstein où K est un corps commutatif de caractéristique différente de 2, il existe un idempotent $e\neq 0$ de A et une décomposition de A en somme directe de sous-espaces $A=Ke\oplus U\oplus V$. Or, bien que U et V dépendent du choix de e, la dimension de U, et, par suite, celle de V, est independante de ce choix. Elle constitue donc un invariant de l'algèbre A que nous utiliserons dans la classification des algèbres de Bernstein. A cet effet, si l'on pose $r=\dim_K(U)$ et $d=\dim_K(V)$, on dira que A est une *algèbre de Bernstein de type* $(r+1,d)$, où $r+1+d=\dim_K(A)$.

3. *Dérivations*

Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2, (A,ω) une K-algèbre de Bernstein et $A=Ke\oplus U\oplus V$ la décomposition de A relativement à un idempotent non trivial e de A. Notons $\mathrm{Der}_K(A)$ le K-espace vectoriel des K-dérivations de A et $\mathrm{End}_K(A)$ celui des K-endomorphismes linéaires de A. De plus, ces deux espaces son naturellement munis d'une structure d'algèbre de Lie et $\mathrm{Der}_K(A)$ devient ainsi une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{End}_K(A)$.

THÉORÈME 3.1. *Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et (A,ω) une K-algèbre de Bernstein. Une condition necéssaire et suffisante pour que une application K-linéaire d: $A\to A$ soit une K-dérivation de A est que les* *conditions suivantes soient vérifiées:*

(i) $d(e) \in U$;

(ii) *pour tout x dans U,*

$$d(x) = f_d(x) + 2xd(e),$$

où l'application f: $\mathrm{Der}_K(A) \to \mathrm{End}_K(U)$ définie par $d \mapsto f_d$ est un morphisme d'algèbres de Lie;

(iii) *pour tout x dans V,*

$$d(x) = -2xd(e) + g_d(x)$$

où l'application g: $\mathrm{Der}_K(A) \to \mathrm{End}_K(V)$ définie par $d \mapsto g_d$ est un morphisme d'algèbres de Lie;

(iv) $g_d(xy) = xf_d(y) + f_d(x)y$, *quels que soient les éléments x et y dans U;*

(v) $f_d(xy) = xg_d(y) + f_d(x)y + 2(xd(e))y$, *quels que soient x dans U et y dans V;*

(vi) $f_d(xy) = xg_d(y) + g_d(x)y - 2(xd(e))y - 2x(yd(e))$, *quels que soient les éléments x et y dans V.*

En effet, on écrit $d(e) = \alpha e + x + y$ avec α dans K, x dans U et y dans V et la relation

$$d(e) = d(e^2) = 2ed(e) = 2\alpha e + x$$

nous dit que $\alpha = 0$ et $y = 0$, donc $d(e) = x \in U$. D'autre part, si l'on écrit, pour x dans U, $d(x) = \alpha e + u + y$ avec α dans K, u dans U et y dans V, on a

$$2ed(x) = 2\alpha e + u$$

et si l'on dérive la relation $2ex = x$, alors

$$2ed(x) + 2d(e)x = d(x)$$

d'où $y = 2xd(e)$ et $\alpha = 0$. Ainsi, pour tout élément x dans U, on peut écrire

$$d(x) = f_d(x) + 2xd(e)$$

où l'on a posé $u = f_d(x)$ et il est facile de voir que l'application f: $\mathrm{Der}_K(A) \to \mathrm{End}_K(U)$ définie par $d \mapsto f_d$ est un morphisme d'algèbres de Lie. De même, pour tout x dans V, on écrit $d(x) = \alpha e + u + y$ avec α dans K, u dans U et y dans V d'où

$$2ed(x) = 2\alpha e + u$$

et, d'autre part, $0 = d(ex) = d(e)x + ed(x)$ soit

$$2xd(e) + 2\alpha e + u = 0,$$

ce qui nous donne $\alpha = 0$ et $u = -2xd(e)$. Si l'on pose $y = g_d(x)$, alors

$$d(x) = -2xd(e) + g_d(x)$$

et on montre facilement que l'application g: $\mathrm{Der}_K(A) \to \mathrm{End}_K(V)$ définie par $d \mapsto g_d$ est un morphisme d'algèbres de Lie. On observe ici que dire que les applications K-linéaires

$$f\colon \mathrm{Der}_K(A) \to \mathrm{End}_K(U) \quad \text{et} \quad g\colon \mathrm{Der}_K(A) \to \mathrm{End}_K(V)$$

sont des morphismes d'algèbres de Lie revient à dire que quelles que soient les dérivations d et d' de A, on a $f_{[d,d']} = [f_d, f_{d'}]$ et $g_{[d,d']} = [g_d, g_{d'}]$.

Notons que si x et y sont dans U,

$$\begin{aligned} g_d(xy) &= d(xy) + 2(xy)d(e) \\ &= d(x)y + xd(y) + 2(xy)d(e) \\ &= (f_d(x) + 2xd(e))y + x(f_d(y) + 2yd(e)) + 2(xy)d(e) \\ &= f_d(x)y + xf_d(y), \end{aligned}$$

car $(xd(e))y + (d(e)y)x + (yx)d(e) = 0$ (identité de Jacobi; cf. théorème 2.4(iii)). Si l'on prend x dans U et y dans V, on a

$$\begin{aligned} f_d(xy) &= d(xy) - 2(xy)d(e) \\ &= d(x)y + xd(y) - 2(xy)d(e) \\ &= (f_d(x) + 2xd(e))y + x(-2yd(e) + g_d(y)) - 2(xy)d(e) \\ &= xg_d(y) + f_d(x)y + 2(xd(e))y, \end{aligned}$$

car $x(yd(e)) + (xy)d(e) = 0$ (cf. théorème 2.4(iv)). Finalement, quels que soient x et y dans V, on a

$$\begin{aligned} f_d(xy) &= d(xy) - 2(xy)d(e) \\ &= d(xy) \\ &= d(x)y + xd(y) \\ &= (-2xd(e) + g_d(x))y + x(-2yd(e) + g_d(y)) \\ &= xg_d(y) + g_d(x)y - 2(xd(e))y - 2x(yd(e)), \end{aligned}$$

car $(xy)d(e) = 0$ (cf. théorème 2.4(vi)).

Réciproquement, soit d: $A \to A$ une application K-linéaire vérifiant les conditions (i) à (vi) du théorème. Pour x et y dans U et en utilisant l'identité de Jacobi (cf. théorème 2.4(iii)), on a

$$\begin{aligned} d(xy) &= g_d(xy) - 2(xy)d(e) \\ &= f_d(x)y + xf_d(y) + 2(xd(e))y + 2x(yd(e)) \\ &= d(x)y + xd(y). \end{aligned}$$

De même, si l'on prend x dans U et y dans V ou si x et y sont dans V, on a

$$d(xy) = d(x)y + xd(y).$$

Finalement, si l'on écrit deux éléments quelconques x et y dans A décomposés d'après la décomposition de A, on voit que

$$d(xy) = d(x)y + dx(y).$$

COROLLAIRE 3.2. *Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de* 2 *et (A, ω) une K-algèbre de Bernstein. Pour toute dérivation d de A, on a* $\omega \circ d = 0$.

Ce corollaire résulte immédiatement du théorème 3.1.

Dans le cas d'un corps de caractéristique zéro, le corollaire 3.2 est vrai, plus généralement, pour des algèbres *uniquement pondérées* (cf. [**5**, théorème 1] pour les algèbres réelles).

Si K est un corps commutatif et si (A, ω) est une algèbre pondérée, on dira que (A, ω) est *uniquement pondérée* si ω: $A \to K$ est l'unique pondération de A et si pour toute extension $K \to L$ de K où L est un corps commutatif, la L-algèbre $A \otimes_K L$ est aussi munie d'une pondération unique. Comme le morphisme composé

$$\omega \otimes \mathrm{id}_L: A \otimes_L K \to K \otimes_K L \xrightarrow{\sim} L$$

est une pondération de $A \otimes_K L$ en tant que L-algèbre, nécessairement $\omega \otimes \mathrm{id}_L$ est l'unique pondération de la L-algèbre $A \otimes_K L$.

Le fait qu'une algèbre soit de Bernstein se conserve par extension du corps des scalaires. Ceci et le lemme 9.3 cf. [**13**] nous montrent que toute algèbre de Bernstein est uniquement pondérée.

THÉORÈME 3.3. *Soient K un corps commutatif de caractéristique zéro et (A, ω) une K-algèbre uniquement pondérée. Pour toute dérivation d de A, on a $\omega \circ d = 0$.*

Soit d: $A \to A$ une dérivation de A et considérons le morphisme de K-algèbres σ_t: $A \to A \otimes_K K((t))$ défini par

$$\sigma_t(x) = x + d(x)t + \frac{1}{2!} d^2(x)t^2 + \ldots + \frac{1}{n!} d^n(x)t^n + \ldots$$

pour tout x dans A, où t est une indeterminée sur K et $K((t))$ est le corps de fractions de l'anneau de séries formelles $K[[t]]$ en l'indeterminée t et à coefficients dans K. On peut étendre σ_t: $A \to A \otimes_K K((t))$ à un $K((t))$-automorphisme de $A((t)) = A \otimes_K K((t))$, en posant $\sigma_t(x \otimes t^m) = \sigma_t(x)t^m$ pour tout x dans A et pour tout entier $m \geqslant 0$. Or, $A((t))$ est une $K((t))$-algèbre pondérée dont l'unique pondération est $\Omega = \omega \otimes \mathrm{id}_{K((t))}$ et ceci nous dit alors que $\Omega \circ \sigma_t = \Omega$. Il est clair que Ω est aussi une fonction de t et si l'on dérive cette dernière relation on a

$$\frac{d\Omega}{dt} \circ \sigma_t + \Omega \circ \frac{d\sigma_t}{dt} = \frac{d\Omega}{dt}$$

d'où, en posant $t = 0$, $\omega \circ d = 0$.

On sait déjà que, étant donnée une K-algèbre A, $\mathrm{Der}_K(A)$ est une sous-algèbre de Lie de $\mathrm{End}_K(A)$. La remarque suivante nous sera utile par la suite:

NOTE 3.4. Soient K un corps commutatif et A une K-algèbre. Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{Der}_K(A) = \mathrm{End}_K(A)$ est que A soit une zéro-algèbre.

Dans certains cas, les dérivations des algèbres de Bernstein peuvent être calculées sans aucune restriction sur la dimension de l'algèbre.

THÉORÈME 3.5. *Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et A une K-algèbre de Bernstein de dimension $n+1$. Alors:*

(i) *si A est de type $(n+1, 0)$, il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie $\mathrm{Der}_K(A) \approx K^n \times_{\text{s.d.}} M_n(K)$;*

(ii) *si A est de type* $(1, n)$, *il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie* $\mathrm{Der}_K(A) \approx M_n(K)$.

En effet, on sait que si A est une algèbre de Bernstein de type $(n+1, 0)$, alors A est isomorphe à l'algèbre gamétique $G(n+1, 2)$ d'une population diploide avec $n+1$ allèles (cf. [**13**, Lemma (9.11)]) donc

$$\mathrm{Der}_K(A) \approx \mathrm{Der}_K(G(n+1, 2)) \approx K^n \times_{\text{s.d.}} M_n(K)$$

(cf. [**11**, note 2.4]). On rappelle ici que la structure d'algèbre de Lie de $K^n \times_{\text{s.d.}} M_n(K)$ (somme semi-directe des espaces vectoriels K^n et $M_n(K)$) est donnée par

$$[(x, \alpha), (y, \beta)] = (y\alpha - x\beta, [\alpha, \beta])$$

pour x et y dans K^n et α et β dans $M_n(K)$, où $[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha$ est le crochet de Lie dans l'algèbre de matrices $M_n(K)$ et où l'action de $M_n(K)$ sur K^n est définie par

$$x\beta = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\beta_{i1}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} x_i\beta_{in}\right),$$

si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est dans K^n et $\beta = (\beta_{ij})$ dans $M_n(K)$. Si A est de type $(1, n)$, alors $U = 0$ et, par suite, il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie $\mathrm{Der}_K(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_K(V)$ (cf. théorème 3.1(iii)). Or, V étant une zéro-algèbre, nécessairement $\mathrm{Der}_K(A) \approx \mathrm{End}_K(V)$, isomorphisme d'algèbres de Lie (cf. Note 3.4) d'où l'isomorphisme d'algèbres de Lie $\mathrm{Der}_K(A) \approx M_n(K)$.

4. *Dérivations en caractéristique* 2

Dans tout ce paragraphe, K sera un corps commutatif de caractéristique 2 et il s'agira, pour nous, de déterminer les dérivations des algèbres de Bernstein sur K. On a ainsi la caractéristation suivante de telles dérivations:

THÉORÈME 4.1. *Soient K un corps commutatif de caractéristique* 2, (A, ω) *une algèbre de Bernstein sur K, et e un idempotent non nul de A.*

Une condition nécessaire et suffisante pour que une application K-linéaire $d: A \to A$ soit une dérivation de A est que:

(i) $d(e) = 0$;

(ii) *pour tout x dans* $\mathrm{Ker}(\omega)$,

$$d(x) = (\omega \circ d)(x)e + f_d(x),$$

où l'application f: $\mathrm{Der}_K(A) \to \mathrm{End}_K(\mathrm{Ker}(\omega))$ *définie par* $d \mapsto f_d$ *est un morphisme d'algèbres de Lie;*

(iii) *quels que soient x et y dans* $\mathrm{Ker}(\omega)$,

$$f_d(xy) = f_d(x)y + xf_d(y) + (\omega \circ d)(x)ey + (\omega \circ d)(y)ex;$$

(iv) *pour tout x dans* $\mathrm{Ker}(\omega)$, $f_d(ex) = f_d(x)e$;

(v) *pour tout x dans* $\mathrm{Ker}(\omega)$, $(\omega \circ d)(ex) = (\omega \circ d)(x)$;

(vi) *quels que soient x et y dans* $\mathrm{Ker}(\omega)$, $(\omega \circ d)(xy) = 0$.

La démonstration de (i) et (ii) se fait de façon analogue à celle du théorème 3.1. Si x et y sont dans $\mathrm{Ker}(\omega)$, d'après (ii) on a $f_d(xy) = d(xy) + \omega(d(xy))e$ et il suffit de developper cette relation, tout en se servant à nouveau de (ii). Ceci nous fournit (iii). Les conditions (iv), (v) et (vi) en découlent immédiatement. Réciproquement, si les conditions (i) à (vi) sont vérifiées, on commence par montrer que $d(xy) = d(x)y + xd(y)$, quels que soient x et y dans $\mathrm{Ker}(\omega)$ et comme $d(e) = 0$, il en résulte que d est une dérivation de A.

NOTE 4.2. Les conditions (iv) et (v) du théorème ci-dessus peuvent être remplacées par la condition (équivalente) suivante: *pour tout x dans* $\mathrm{Ker}(\omega)$, $d(ex) = ed(x)$. En effet, pour tout x dans $\mathrm{Ker}(\omega)$, on écrit

$$d(x) = (\omega \circ d)(x)e + f_d(x)$$

d'où

$$ed(x) = (\omega \circ d)(x)e + f_d(x)e$$

et

$$d(ex) = (\omega \circ d)(ex)e + f_d(ex)$$

et ceci nous dit que la condition ci-dessus est verifiée si et seulement si on a les conditions (iv) et (v) du théorème 4.1.

Notons que si (A, ω) est une K-algèbre de Bernstein, où K est un corps commutatif de caractéristique 2, si $d\colon A \to A$ est une dérivation de A, ceci n'entraîne pas que $\omega \circ d = 0$, comme en caractéristique différente de 2 (cf. corollaire 3.2).

EXEMPLE 4.3. Soient donc K un corps commutatif de caractéristique 2, (A, ω) la K-algèbre de Bernstein de dimension 2 dont la table de multiplication relativement à la base $\{e_0, e_1\}$ avec $e_0 = e$, $\omega(e) = 1$ et $\{e_1\}$ base de $\mathrm{Ker}(\omega)$, s'écrit: $e_0^2 = e_0$, $e_0e_1 = e_1$ et $e_1^2 = 0$. L'application K-linéaire $d\colon A \to A$ définie par $d(e_0) = 0$ et $d(e_1) = e_0$ est une K-dérivation de A et $\omega \circ d \neq 0$.

De même, le fait que d soit un endomorphisme K-linéaire d'une algèbre de Bernstein (A, ω) tel que $\omega \circ d = 0$, ceci n'entraîne pas que d soit une K-dérivation de A.

EXEMPLE 4.4. Soient K un corps commutatif de caractéristique 2, (A, ω) la K-algèbre de Bernstein de dimension 2 définie dans l'exemple 4.3. L'application K-linéaire $d\colon A \to A$ définie par $d(e_0) = e_1$ et $d(e_1) = 0$ n'est pas une dérivation de A et $\omega \circ d = 0$.

Ces considérations nous conduisent au résultat suivant, lequel nous permettra de calculer certaines algèbres de dérivations:

PROPOSITION 4.5. *Soient K un corps commutatif de caractéristique* 2, (A, ω) *une K-algèbre de Bernstein et* $f\colon \mathrm{Der}_K(A) \to \mathrm{End}_K(\mathrm{Ker}(\omega))$ *le morphisme d'algèbres de Lie défini dans le théorème* 4.1(ii). *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $\omega \circ d = 0$ *pour toute dérivation d de A est que le morphisme f soit injectif.*

Il est clair que si d: $A \to A$ est une dérivation de A, alors $\omega \circ d = 0$ si et seulement si $d|_{\mathrm{Ker}(\omega)} = f_d$ et ceci entraîne que f: $\mathrm{Der}_K(A) \to \mathrm{End}_K(\mathrm{Ker}(\omega))$ est un morphisme injectif d'algèbres de Lie. Réciproquement, si f: $\mathrm{Der}_K(A) \to \mathrm{End}_K(\mathrm{Ker}(\omega))$ est un morphisme injectif d'algèbres de Lie, on peut identifier d à son image par f dans $\mathrm{End}_K(\mathrm{Ker}(\omega))$ et ceci pour toute dérivation d de A. L'équation $d = f_d$ entraîne alors, compte tenu de théorème 4.1(ii), que $(\omega \circ d)(x) = 0$ pour tout x dans $\mathrm{Ker}(\omega)$ et comme $d(e) = 0$ (cf. théorème 4.1(i)), alors $\omega \circ d = 0$ pour toute dérivation d de A.

PROPOSITION 4.6. *Soient K un corps commutatif de caractéristique 2 et (A, ω) une K-algèbre de Bernstein. Si le morphisme d'algèbres de Lie*

$$f\colon \mathrm{Der}_K(A) \to \mathrm{End}_K(\mathrm{Ker}(\omega))$$

est injectif et si les applications K-linéaires

$$d_{ij}\colon \mathrm{Ker}(\omega) \to \mathrm{Ker}(\omega) \quad (i, j = 1, \ldots, n)$$

définies par $d_{ij}(e_k) = \delta_{ik} e_j$ $(i, j, k = 1, \ldots, n)$, où $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de $\mathrm{Ker}(\omega)$ sur K, se prolongent en dérivations de A, alors $(d_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathrm{Der}_K(A)$ et il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie

$$f\colon \mathrm{Der}_K(A) \xrightarrow{\sim} M_n(K)$$

donné par $d_{ij} \mapsto e_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$, où $(e_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la base canonique de l'algèbre des matrices $M_n(K)$.

En effet, dire que les d_{ij} se prolongent en dérivations de A c'est dire que $d_{ij}(e) = 0$ pour $i, j = 1, \ldots, n$, où e est un idempotent de A vérifiant $\omega(e) = 1$. Si, maintenant, d est une dérivation de A et si l'on écrit $d(e_k) = \sum_{j=1}^n \alpha_{kj} e_j$ $(k = 1, \ldots, n)$, où les α_{kj} sont dans K, alors $d = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} d_{ij}$ et il est clair, d'autre part, que les d_{ij} sont K-linéairement indépendants. Pour montrer, finalement, que f est un morphisme d'algèbres de Lie, il suffit de l'appliquer à la relation

$$[d_{ij}, d_{kl}] = \delta_{il} d_{kj} - \delta_{kj} d_{il} \quad (i, j, k, l = 1, \ldots, n).$$

EXEMPLE 4.7. Soient K un corps commutatif de caractéristique 2, (A, ω) une K-algèbre de Bernstein de dimension 2, e un idempotent non trivial de A, $\{e_1\}$ une base de $\mathrm{Ker}(\omega)$ et considérons la table de multiplication de A relativement à la base $\{e_0, e_1\}$ avec $e_0 = e$, $e_0^2 = e_0$, $e_0 e_1 = e_1 e_0 = \gamma e_1$ et $e_1^2 = 0$. Pour toute dérivation d de A, on a $d(e_0) = 0$ et $d(e_1) = \alpha e_0 + \beta e_1$ avec α et β dans K. L'application K-linéaire $\mathrm{Der}_K(A) \to K \times K$ définie par $d \mapsto (\alpha, \beta)$ est injective et est un morphisme d'algèbres de Lie, la structure de Lie de $K \times K$ étant définie par $[(\alpha, \beta), (\alpha', \beta')] = (\alpha\beta' - \alpha'\beta, 0)$, quel que soient les éléments α, β, α', β' dans K. Réciproquement, une application K-linéaire d: $A \to A$ définie par $d(e_0) = 0$ et $d(e_1) = \alpha e_0 + \beta e_1$ avec α et β donnés dans K est une dérivation de A si et seulement si quels que soient λ, μ, λ', μ' dans K on a $\alpha(\lambda'\mu + \lambda\mu')(\gamma - 1) = 0$. Donc, si l'on se donne α non nul dans K, d est une dérivation si et seulement si $\gamma = 1$. Autrement dit, le *morphisme* $\mathrm{Der}_K(A) \xrightarrow{\sim} K \times K$ *est un isomorphisme si et seulement si* $\gamma = 1$. Si $\gamma \neq 1$, l'unique solution de l'equation $\alpha(\lambda'\mu + \lambda\mu') = 0$ est $\alpha = 0$, d'où $\mathrm{Der}_K(A) \cong K$.

5. *Automorphismes*

Le but de ce paragraphe est d'étudier les automorphismes d'une algèbre de Bernstein sur un corps de caractéristique différente de 2.

THÉORÈME 5.1. *Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2, (A, ω) une K-algèbre de Bernstein, e un idempotent non nul de A et $A = Ke \oplus U \oplus V$ la décomposition de A relativement à cet idempotent. Une condition nécessaire et suffisante pour que une application K-linéaire σ: $A \to A$ soit un K-automorphisme de A est que les conditions suivantes soient vérifiées:*

(i) $\sigma(e) = e + e_\sigma + e_\sigma^2$ *où e_σ est un élément de U qui dépend de σ;*

(ii) $\sigma(x) = f_\sigma(x) + 2f_\sigma(x)e_\sigma$ *pour tout x dans U où f_σ est dans* $\mathrm{GL}_K(U)$;

(iii) $\sigma(x) = -2g_\sigma(x)e_\sigma + g_\sigma(x)$ *pour tout x dans V où g_σ est dans* $\mathrm{GL}_K(V)$;

(iv) $g_\sigma(xy) = f_\sigma(x)f_\sigma(y)$ *et* $(f_\sigma(x)e_\sigma)(f_\sigma(y)e_\sigma) = 0$, *quels que soient x et y dans U;*

(v) $f_\sigma(xy) = g_\sigma(x)g_\sigma(y) - 2(g_\sigma(x)e_\sigma)g_\sigma(y) - 2(g_\sigma(y)e_\sigma)g_\sigma(x)$ *et* $(g_\sigma(x)e_\sigma)(g_\sigma(y)e_\sigma) = 0$, *quels que soient x et y dans V;*

(vi) $f_\sigma(xy) = f_\sigma(x)g_\sigma(y) - 4(f_\sigma(x)e_\sigma)(g_\sigma(y)e_\sigma) + 2(f_\sigma(x)e_\sigma)g_\sigma(y)$ *et* $((f_\sigma(x)e_\sigma)(g_\sigma(y)e_\sigma))e_\sigma = 0$, *pour tout x dans U et pour tout y dans V;*

(vii) $g_\sigma(x)e_\sigma^2 = 0$ *pour tout x dans V.*

On sait que l'image d'un élément idempotent par un automorphisme σ de A est encore idempotent. De plus tout élément idempotent a la forme $e + x + x^2$ avec x dans U, donc si l'on pose $x = e_\sigma$, un élément de U qui dépend de σ, on obtient $\sigma(e) = e + e_\sigma + e_\sigma^2$.

Si x est un élément de U, on écrit $\sigma(x) = \alpha e + u + y$ avec α dans K, u dans U et y dans V, et la relation $x = 2ex$ nous donne $\sigma(x) = 2\sigma(e)\sigma(x)$, soit

$$\alpha e + u + y = 2(e + e_\sigma + e_\sigma^2)(\alpha e + u + y)$$

d'où $\alpha = 0$ et $\sigma(x) = u + 2ue_\sigma$. Si l'on pose $u = f_\sigma(x)$, on a $\sigma(x) = f_\sigma(x) + 2f_\sigma(x)e_\sigma$ et il est facile de voir que f_σ est dans $\mathrm{GL}_K(U)$ pour tout σ dans $\mathrm{Aut}_K(A)$. De même, si x est dans V, on écrit $\sigma(x) = \alpha e + u + y$ avec α dans K, u dans U et y dans V et la relation $ex = 0$ entraîne

$$0 = \sigma(ex) = \sigma(e)\sigma(x) = (e + e_\sigma + e_\sigma^2)(\alpha e + u + y)$$

d'où $\alpha = 0$ et $\sigma(x) = -2e_\sigma y + y$. Si l'on pose $y = g_\sigma(x)$, on a

$$\sigma(x) = -2g_\sigma(x)e_\sigma + g_\sigma(x)$$

et il est facile de voir que g_σ est dans $\mathrm{GL}_K(V)$ pour tout σ dans $\mathrm{Aut}_K(A)$.

Soient maintenant x et y dans U. La relation $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ nous donne

$$g_\sigma(xy) = f_\sigma(x)f_\sigma(y) \quad \text{et} \quad (f_\sigma(x)e_\sigma)(f_\sigma(y)e_\sigma) = 0.$$

De même, si x et y sont dans V, à partir de la relation $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ on a

$$f_\sigma(xy) = g_\sigma(x)g_\sigma(y) - 2(g_\sigma(x)e_\sigma)g_\sigma(y) - 2(g_\sigma(y)e_\sigma)g_\sigma(x)$$

et

$$(g_\sigma(x)e_\sigma)(g_\sigma(y)e_\sigma) = 0$$

et, finalement, si x est dans U et y est dans V, la relation $\sigma(xy)=\sigma(x)\sigma(y)$ nous donne

$$f_\sigma(xy)=f_\sigma(x)g_\sigma(y)-4(f_\sigma(x)e_\sigma)(g_\sigma(y)e_\sigma)+2(f_\sigma(x)e_\sigma)g_\sigma(y)$$

et

$$((f_\sigma(x)e_\sigma)(g_\sigma(y)e_\sigma))e_\sigma=0.$$

Pour démontrer la dernière condition, on applique σ à la relation $ex=0$ avec x dans V. La réciproque se démontre, au moyen de calculs, en vérifiant que l'application K-linéaire $\sigma\colon A\to A$ donnée par

$$\sigma(\alpha e+x+y)=\alpha(e+u+u^2)+f(x)-2g(y)u+2f(x)u+g(y)$$

avec α dans K, x dans U et y dans V et où les conditions (i) à (vii) du théorème sont vérifiées pour le triplet (u, f, g) (à la place de $(e_\sigma, f_\sigma, g_\sigma)$), est un automorphisme de A.

Exemple 5.2. Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2, (A,ω) la K-algèbre de Bernstein de dimension 3 et type (2.1), $A=Ke\oplus U\oplus V$ avec $e^2=e$ et $\omega(e)=1$, $\{e_1\}$ base de U sur K et $\{e_2\}$ base de V sur K. Supposons que la table de multiplication de l'algèbre A relativement à la base $\{e_0, e_1, e_2\}$ avec $e_0=e$ s'écrit $e_0^2=e_0$, $e_0e_1=\frac{1}{2}e_1$, $e_0e_2=0$, $e_1e_2=0$, $e_1^2=0$ et $e_2^2=\gamma e$ avec $\gamma\neq 0$ dans K. On a $U^2=UV=0$ et $V^2=U$. Il existe alors scalaires λ, μ et ν dans K tels que $\sigma(e)=e+\lambda e_1$, $\sigma(e_1)=\nu e_1$ et $\sigma(e_2)=\mu e_2$, où σ est un automorphisme de A. Les conditions (iv), (vi) et (vii) du Théorème 5.1 sont automatiquement vérifiées et pour que la condition (v) soit aussi vérifiée, il faut et il suffit que $\nu=\mu^2$. Il est clair que $\mu\neq 0$ et si l'on considère sur l'ensemble $K^+\times K^*$ la structure de groupe définie par $(\lambda,\mu)(\lambda',\mu')=(\lambda+\lambda'\mu^2, \mu\mu')$ pour λ et λ' parcourant K^+ et pour μ et μ' dans K^*, alors l'application $\mathrm{Aut}_K(A)\xrightarrow{\sim} K^+\times_{\mathrm{s.d.}}K^*$ définie par $\sigma\mapsto(\lambda,\mu)$ est un isomorphisme de groupes.

Exemple 5.3. Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2, (A,ω) une K-algèbre de Bernstein de dimension 3 et type $(2,1)$, $A=Ke\oplus U\oplus V$ avec $e^2=e$, $\omega(e)=1$, $\{e_1\}$ une base de U et $\{e_2\}$ une base de V sur K, la table de multiplication de A relativement à la base $\{e, e_1, e_2\}$ étant $e^2=e$, $ee_1=\frac{1}{2}e_1$, $ee_2=0$, $e_1^2=0$, $e_1e_2=\beta e_1$ avec $\beta\neq 0$ dans K et $e_2^2=0$. On a ici $U^2=V^2=0$ et $UV=U$. Si σ est un K-automorphisme de A, on peut écrire $\sigma(e)=e+\mu e_1$, $\sigma(e_1)=\lambda e_1$ et $\sigma(e_2)=-2\mu\nu\beta e_1+\nu e_2$ avec λ, μ, ν dans K et $\lambda\neq 0$. La condition (vi) du théorème 5.1 entraîne $\nu=1$ et la condition (v) nous donne $\mu=0$. On voit alors facilement que toutes les conditions du théorème 5.1 son vérifiées et on peut écrire $\sigma(e)=e$, $\sigma(e_1)=\lambda e_1$ avec λ dans K, $\lambda\neq 0$ et $\sigma(e_2)=e_2$. L'application $\mathrm{Aut}_K(A)\xrightarrow{\sim} K^*$ définie par $\sigma\mapsto\lambda$ est alors un isomorphisme de groupes.

Exemple 5.4. De même que dans les exemples précedents, A est une algèbre de Bernstein de dimension 3 et type $(2,1)$ mais sa table de multiplication relativement à la base $\{e, e_1, e_2\}$ s'écrit $e^2=e$, $ee_1=\frac{1}{2}e_1$, $ee_2=0$, $e_1^2=0$, $e_1e_2=\beta e_1$ et $e_2^2=\gamma e_1$ avec β et γ dans K, $\beta\neq 0$ et $\gamma\neq 0$. Si σ est un K-automorphisme de A on peut écrire $\sigma(e)=e+\lambda e_1$, $\sigma(e_1)=\mu e_1$ et $\sigma(e_2)=-2\beta\lambda\nu e_1+\nu e_2$ avec λ, μ, ν dans K et $\mu\neq 0$. La condition (vi) du théorème 5.1 nous donne $\nu=1$ (il suffit de calculer $f_\sigma(e_1e_2)=f_\sigma(e_1)g_\sigma(e_2)$) et la condition (v) nous fournit $\mu=$

$1-4\lambda\beta^2\gamma^{-1}$ (il suffit de calculer $f_\sigma(e_2^2)=g_\sigma(e_2)g_\sigma(e_2)-4(g_\sigma(e_2)e_\sigma)g_\sigma(e_2))$. On a ainsi $\sigma(e)=e+\lambda e_1$, $\sigma(e_1)=(1-4\lambda\beta^2\gamma^{-1})e_1$ et $\sigma(e_2)=-2\beta\lambda e_1+e_2$. Notons $\Theta=\beta^2\gamma^{-1}$. Si σ' est un autre automorphisme de A et si l'on écrit $\sigma'(e)=e+\lambda' e_1$, $\sigma'(e_1)=(1-4\lambda'\Theta)e_1$ et $\sigma'(e_2)=-2\beta\lambda' e_1+e_2$ avec λ' dans K, alors

$$\sigma\sigma'(e)=e+(\lambda+\lambda'-4\lambda\lambda'\Theta)e_1,$$
$$\sigma\sigma'(e_1)=(1-4\lambda\Theta)(1-4\lambda'\Theta)e_1$$

et

$$\sigma\sigma'(e_2)=-2\beta(\lambda+\lambda'-4\lambda\lambda'\Theta)e_1+e_2.$$

Soit $K(\Theta)=\{\lambda \mid \lambda\in K,\ 1-4\lambda\Theta\neq 0\}$ et définissons sur $K(\Theta)$ la structure suivante de groupe abélien: $\lambda \mp \lambda'=\lambda+\lambda'-4\lambda\lambda'\Theta$ pour λ et λ' parcourant $K(\Theta)$. Comme

$$1-4(\lambda\mp\lambda')\Theta=(1-4\lambda\Theta)(1-4\lambda'\Theta),$$

il s'ensuit que $\lambda\mp\lambda'$ est dans $K(\Theta)$, quels que soient λ et λ' dans $K(\Theta)$ et muni de cette loi de composition $K(\Theta)$ est un groupe abélien. L'application $\mathrm{Aut}_K(A)\xrightarrow{\sim}K(\Theta)$ définie par $\sigma\mapsto\lambda$ est un isomorphisme de groupes et $K(\Theta)\approx K^*$, isomorphisme de groupes (cf. 5.5).

5.5. *Le groupe* $K(\Theta)$. Plus généralement, soient K un anneau commutatif à élément unité, Θ un élément de K et notons

$$K(\Theta)=\{\lambda \mid \lambda\in K,\ 1-4\lambda\Theta\in U(K)\}$$

où $U(K)$ est le groupe multiplicatif des éléments inversibles de K. La somme

$$\lambda\mp\lambda'=\lambda+\lambda'-4\lambda\lambda'\Theta,$$

pour λ et λ' parcourant $K(\Theta)$, définit sur l'ensemble $K(\Theta)$ une structure de groupe abélien. On voit que $K(0)=K^+$, le groupe abélien additif soujacent à K. Par ailleurs, l'application $K(\Theta)\to U(K)$ définie par $\lambda\mapsto 1-4\lambda\Theta$ est un morphisme de groupes et il est injectif si l'homothétie définie par 4Θ dans K est injective. De plus, si 2 et Θ sont inversibles dans K, le morphisme $K(\Theta)\xrightarrow{\sim}U(K)$, $\lambda\mapsto 1-4\lambda\Theta$ est un isomorphisme, l'isomorphisme réciproque étant défini par $K(\Theta)\xleftarrow{\sim}U(K)$, $(1/4\Theta)(1-\lambda)\leftarrow\!\shortmid\lambda$. En particulier, si K est un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et si $\Theta\neq 0$ est un élément de K, alors $K(\Theta)\xrightarrow{\sim}K^*$ isomorphisme de groupes. Le groupe $K(\Theta)$ intervient dans la théorie algébrique des formes quadratiques (cf. [**9**]).

EXEMPLE 5.6. Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2, (A,ω) une K-algèbre de Bernstein de dimension 3 et type $(2,1)$ dont la table de multiplication relativement à la base $\{e, e_1, e_2\}$ (cf. exemple 5.2) s'écrit $e^2=e$, $ee_1=\frac{1}{2}e_1$, $ee_2=e_1e_2=0$, $e_1^2=\alpha e_2$ et $e_2^2=0$, où $\alpha\neq 0$ est dans K. Si σ est un K-automorphisme de A et si l'on pose $f_\sigma(e_1)=\mu e_1$, $g_\sigma(e_2)=\nu e_2$ et $e_\sigma=\lambda e_1$ avec λ, μ, ν dans K, le théorème 5.1 nous permet d'écrire

$$\sigma(e)=e+\lambda e_1+\lambda^2\alpha e_2,$$
$$\sigma(e_1)=\mu e_1+2\lambda\mu\alpha e_2$$

et

$$\sigma(e_2)=\nu e_2$$

et la condition (iv) du théorème 5.1 entraîne $\nu=\mu^2$. L'application $\mathrm{Aut}_K(A) \cong K^+ \times_{\text{s.d.}} K^*$ (=Aff(K) le groupe affine de K) définie par $\sigma \mapsto (\lambda, \mu)$ est un isomorphisme de groupes. Rappelons que la structure de groupe de $K^+ \times_{\text{s.d.}} K^*$ est donnée par $(\lambda, \mu)(\lambda', \mu')=(\lambda+\lambda'\mu, \mu\mu')$, pour (λ, μ) et (λ', μ') dans $K^+ \times_{\text{s.d.}} K^*$.

Exemple 5.7. Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2, (A, ω) une K-algèbre de Bernstein de dimension 3 et type $(1,2)$ dont la table de multiplication relativement à la base $\{e, e_1, e_2\}$ (cf. exemple 5.2) s'écrit $e^2=e$, tous les autres produits étant nuls. On voit facilement que pour tout automorphisme σ de A, on a

$$\sigma(e)=e,$$
$$\sigma(e_1)=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2$$

et

$$\sigma(e_2)=\mu_1 e_1+\mu_2 e_2$$

avec λ_1, λ_2, μ_1 et μ_2 dans K. L'application K-linéaire

$$\mathrm{Aut}_K(A) \cong K \times K \times K \times K$$

définie par $\sigma \mapsto (\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)$ devient alors un isomorphisme de groupes si l'on définir sur $K \times K \times K \times K$ la structure de groupe donnée par

$$(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)(\lambda_1', \lambda_2', \mu_1', \mu_2')$$
$$=(\lambda_1\lambda_1'+\mu_1\lambda_2', \lambda_2\lambda_1'+\mu_2\lambda_2', \lambda_1\mu_1'+\mu_1\mu_2', \lambda_2\mu_1'+\mu_2\mu_2')$$

pour λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, λ_1', λ_2', μ_1' et μ_2' parcourant K.

Pour une K-algèbre A, notons $\mathrm{Ip}(A)$ l'ensemble des éléments idempotents de A.

Théorème 5.8. *Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de* 2 *et (A, ω) une K-algèbre de Bernstein de dimension $n+1$. Alors:*

(i) *si A est de type $(n+1, 0)$, il existe un isomorphisme de groupes*

$$\mathrm{Aut}_K(A) \cong \mathrm{Ip}(A) \times \mathrm{GL}_K(U);$$

(ii) *si A est de type $(1, n)$, il existe un isomorphisme de groupes*

$$\mathrm{Aut}_K(A) \cong \mathrm{GL}_K(V).$$

Notons que l'équivalent de ce théorème, pour les dérivations, est le théorème 3.5. Ainsi, si A est de type $(n+1, 0)$, on a $V=0$ et la multiplication de A est donnée par $xy=\frac{1}{2}(\omega(y)x+\omega(x)y)$, quels que soient x et y dans A (cf. [**13**, théorème 9.10(2)]) donc $\sigma(e)=e+e_\sigma$ et $\sigma(x)=f_\sigma(x)$ pour tout x dans $\mathrm{Ker}(\omega)$ (cf. théorème 5.1). Ceci nous montre que l'application $\mathrm{Aut}_K(A) \cong \mathrm{Ip}(A) \times \mathrm{GL}_K(U)$ définie par $\sigma \mapsto (e+e_\sigma, f_\sigma)$ est un isomorphisme des groupes, la structure de groupe de $\mathrm{Ip}(A) \times \mathrm{GL}_K(U)$ étant facile d'établir. Si A est de type $(1, n)$, pour tout automorphisme σ de A on a $\sigma(e)=e$ et $\sigma(e_i)=\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} e_j$ $(i=1, \ldots, n)$, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ étant une base de V sur K, où la matrice (λ_{ij}) est inversible et où les λ_{ij} sont dans K. L'application $\mathrm{Aut}_K(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_K(V)$ définie par $\sigma \mapsto (\lambda_{ij})$ est alors un isomorphisme de groupes.

6. *Automorphismes en caractéristique* 2

Soient K un corps commutatif de caractéristique 2, (A, ω) une K-algèbre de Bernstein et $A = Ke \oplus \mathrm{Ker}(\omega)$ la décomposition de A relativement à un idempotent non trivial e de A. On remarque, tout d'abord, que *les seuls idempotents de* A *sont* 0 *et* e. En effet, si $\alpha e + x$ est un idempotent de A avec α dans K et x dans $\mathrm{Ker}(\omega)$, la relation $(\alpha e + x)^2 = \alpha e + x$ nous donne $\alpha = \alpha^2$ et $x = 0$ d'où $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ et $x = 0$. Si, maintenant, σ: $A \to A$ est un K-automorphisme de A et si l'on écrit $\sigma(e) = \alpha e + x$ avec α dans K et x dans $\mathrm{Ker}(\omega)$, le fait que $e^2 = e$ entraîne $\sigma(e)^2 = \sigma(e)$ donc $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$ et $x = 0$. Mais on ne peut pas avoir $\alpha = 0$, car σ est un automorphisme de A, donc $\sigma(e) = e$. Soit x dans $\mathrm{Ker}(\omega)$ et écrivons $\sigma(x) = \alpha e + y$ avec α dans K et y dans $\mathrm{Ker}(\omega)$. Or, on sait que $\omega \circ \sigma = \omega$ car toute algèbre de Bernstein admet une pondération unique (cf. [**13**, lemme 9.3]), donc si l'on applique ω à la relation ci-dessus on a $\alpha = 0$, soit $\sigma(x) = y$. Ceci nous dit que $f_\sigma = \sigma|_{\mathrm{Ker}(\omega)}$, la restriction de σ à $\mathrm{Ker}(\omega)$, est un endomorphisme K-linéaire de $\mathrm{Ker}(\omega)$ vérifiant $f_\sigma(xy) = f_\sigma(x)f_\sigma(y)$, quels que soient x et y dans $\mathrm{Ker}(\omega)$ ce qui démontre le résultat suivant:

PROPOSITION 6.1. *Soient K un corps commutatif de caractéristique* 2, (A, ω) *une K-algèbre de Bernstein et $A = Ke \oplus \mathrm{Ker}(\omega)$ la décomposition de A rélativement à un idempotent non trivial e de A. Une condition nécessaire et suffisante pour que une application K-linéaire σ: $A \to A$ soit un K-automorphisme de A est que les conditions suivantes soient vérifiées:*

(i) $\sigma(e) = e$;

(ii) *il existe une application K-linéaire injective f_σ:* $\mathrm{Ker}(\omega) \to \mathrm{Ker}(\omega)$ *telle que $\sigma(x) = f_\sigma(x)$ pour tout x dans* $\mathrm{Ker}(\omega)$, *vérifiant $f_\sigma(xy) = f_\sigma(x)f_\sigma(y)$, quels que soient x et y dans* $\mathrm{Ker}(\omega)$ *et $f_\sigma(ex) = ef_\sigma(x)$ pour tout x dans* $\mathrm{Ker}(\omega)$.

THÉORÈME 6.2. *Soient K un corps commutatif de caractéristique* 2 *et* (A, ω) *une K-algèbre de Bernstein. Il existe alors un isomorphisme de groupes* $\mathrm{Aut}_K(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_K(\mathrm{Ker}(\omega))$, *c'est à dire, le groupe des automorphismes de A est isomorphe au groupe linéaire du K-espace vectoriel* $\mathrm{Ker}(\omega)$.

En effet, il suffit de vérifier que l'application $\mathrm{Aut}_K(A) \to \mathrm{GL}_K(\mathrm{Ker}(\omega))$ définie par $\sigma \mapsto f_\sigma$ est un morphisme de groupes et celui-ci est l'isomorphisme cherché.

7. *Dérivations des algèbres de Bernstein de dimension* 3 *en caractéristique différente de* 2

Soient K un corps commutatif de caractéristique différente de 2, (A, ω) une K-algèbre de Bernstein de dimension 3 et $A = Ke \oplus U \oplus V$ la décomposition de A relativement à un idempotent non trivial e de A. Le calcul des dérivations de A sera fait en fonction du type de A et en utilisant la classification de ces algèbres données dans [**13**, tableau 9.20].

7.1. *L'algèbre A est de type* (1, 2). D'après le théorème 3.8(ii), il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie $\mathrm{Der}_K(A) \cong M_2(K)$ et il est clair que *l'algèbre de Lie* $\mathrm{Der}_K(A)$ *n'est pas résoluble et qu'elle n'est pas non plus semi-simple.*

7.2. *L'algèbre A est de type* (2, 1) *avec* $UV + V^2 = 0$ *et* $U^2 = 0$. Si $\{e_1\}$ est une base de U et $\{e_2\}$ une base de V sur K, la table de multiplication de A relativement à la base $\{e, e_1, e_2\}$ s'écrit $e^2 = e$, $ee_1 = \frac{1}{2}e_1$, $ee_2 = 0$, $e_1^2 = 0$, $e_1e_2 = 0$ et $e_2^2 = 0$. Pour toute K-dérivation d de A, il existe des scalaires α, β et γ dans K tels que $d(e) = \alpha e_1$, $d(e_1) = \beta e_1$ et $d(e_2) = \gamma e_2$, c'est à dire, l'algèbre de Lie $\mathrm{Der}_K(A)$ est de dimension 3 et une base est formée des dérivations d_1, d_2 et d_3 définies par $d_1(e) = e_1$, $d_1(e_1) = 0$, $d_1(e_2) = 0$, $d_2(e) = 0$, $d_2(e_1) = e_1$, $d_2(e_2) = 0$, $d_3(e) = 0$, $d_3(e_1) = 0$ et $d_3(e_2) = e_2$. La table de multiplication de $\mathrm{Der}_K(A)$ relativement à la base $\{d_1, d_2, d_3\}$ s'écrit

$$[d_1, d_2] = -[d_2, d_1] = -d_1,$$

tous les autres produits étant nuls et on a le résultat suivant: *l'algèbre de Lie* $\mathrm{Der}_K(A)$ *est de dimension* 3, *résoluble, non nilpotente ni semi-simple.*

7.3. *L'algèbre A est de type* (2, 1) *avec* $UV + V^2 = 0$ *et* $\dim_K(U^2) = 1$. Si $\{e_1\}$ est une base de U et $\{e_2\}$ une base de V sur K, la table de multiplication de A relativement à la base $\{e, e_1, e_2\}$ s'écrit $e^2 = e$, $ee_1 = \frac{1}{2}e_1$, $ee_2 = 0$, $e_1^2 = \alpha e_2$, $e_1e_2 = 0$ et $e_2^2 = 0$, avec $\alpha \neq 0$ dans K. Pour toute K-dérivation d de A, on a

$$d(e) = \lambda e_1,$$
$$d(e_1) = \mu e_1 + 2\lambda\alpha e_2$$

et

$$d(e_2) = 2\mu e_2$$

avec λ et μ dans K. L'application $\mathrm{Der}_K(A) \cong K \times_{\mathrm{s.d.}} K$ définie par $d \mapsto (\lambda, \mu)$ est alors un isomorphisme d'algèbres de Lie. En fait, on sait (cf. [**13**, tableau 9.20]) que dans ce cas, A est isomorphe à l'algèbre zygotique $Z(2, 2)$ pour l'héritage mendelien simple avec deux alléles et on a les isomorphismes d'algèbre de Lie

$$\mathrm{Der}_K(G(2, 2)) \cong \mathrm{Der}_K(Z(2, 2))$$

(cf. [**6**, théorème 3]) et

$$\mathrm{Der}_K(G(2, 2)) \cong K \times_{\mathrm{s.d.}} K$$

(cf. [**10**, théorème 2.3]). On a ainsi: *l'algèbre de Lie* $\mathrm{Der}_K(A)$ *est de dimension* 2, *résoluble, non nilpotente ni semi-simple* (cf. [**11**, théorème 2.3]).

7.4. *L'algèbre A est de type* (2, 1) *avec* $\dim_K(UV + V^2) = 1$ *et* $U^2 = 0$. Si $\{e_1\}$ est une base de U et $\{e_2\}$ une base de V sur K, la table de multiplication de A relativement à la base $\{e, e_1, e_2\}$ s'écrit $e^2 = e$, $ee_1 = \frac{1}{2}e_1$, $ee_2 = 0$, $e_1^2 = 0$, $e_1e_2 = \beta e_1$ et $e_2^2 = \gamma e_1$ où β et γ sont dans K non simultanément nuls. Pour toute dérivation d de A on a

$$d(e) = \lambda e_1,$$
$$d(e_1) = \mu e_1$$

et

$$d(e_2) = -2\lambda\beta e_1 + \nu e_2$$

avec λ, μ et ν dans K. Si l'on dérive la relation $e_2^2 = \gamma e_1$, on a $\gamma\mu = -4\lambda\beta^2 + 2\nu\gamma$ et si l'on dérive $e_1 e_2 = \beta e_1$, on a $\nu\beta = 0$. Différents cas sont à envisager.

(i) $\gamma = 0$ *et* $\beta \neq 0$. Dans ce cas on a $\lambda = \nu = 0$ donc $d(e) = 0$, $d(e_1) = \mu e_1$ et $d(e_2) = 0$ et une base de $\mathrm{Der}_K(A)$ est obtenu en faisant $\mu = 1$. Ainsi, $\dim_K(\mathrm{Der}_K(A)) = 1$ et $\mathrm{Der}_K(A)$ *est une algèbre de Lie nilpotente mais non semi-simple.*

(ii) $\gamma \neq 0$ *et* $\beta = 0$. Les relations ci-dessus nous donnent $\mu = 2\nu$ donc $d(e) = \lambda e_1$, $d(e_1) = 2\nu e_1$ et $d(e_2) = \nu e_2$ et une base de $\mathrm{Der}_K(A)$ est formée par les dérivations d_1 et d_2 vérifiant les relations $d_1(e) = e_1$, $d_1(e_1) = 0$, $d_1(e_2) = 0$, $d_2(e) = 0$, $d_2(e_1) = 2e_1$ et $d_2(e_2) = e_2$. La table de multiplication de $\mathrm{Der}_K(A)$ s'écrit $[d_1, d_2] = -[d_2, d_1] = -2d_1$ donc $\mathrm{Der}_K(A)$ *est une algèbre résoluble, non nilpotente ni semi-simple.*

(iii) $\gamma \neq 0$ et $\beta \neq 0$. On a ici $\nu = 0$ donc $\gamma\mu = -4\lambda\beta^2$ et, par suite, $\mu = -4\gamma^{-1}\beta^2\lambda$. Ceci nous montre que $\mathrm{Der}_K(A) \simeq K$.

Notons $A(\beta, \gamma)$ la K-algèbre définie dans ce paragraphe avec β et γ dans K. On voit facilement qu'il existe un isomorphisme de K-algèbres $A(\beta, \gamma) \approx A(-2\beta^2, 0)$ avec $\beta \neq 0$ et $\gamma \neq 0$ ou encore, les algèbres A des case (i) et (iii) sont isomorphes.

7.5. *L'algèbre A est de type* (3, 0). Dans ce cas on sait (cf. [**13**, tableau 9.20]) que A est isomorphe à l'algèbre $G(3, 2)$ de d'héritage mendelien simple avec deux alléles donc $\mathrm{Der}_K(A) \approx K^2 \times_{\mathrm{s.d.}} M_2(K)$ (cf. théorème 3.5). De plus, *cette algèbre n'est pas résoluble* (cf. [**11**, théorème 2.3 et note 2.4]) donc elle n'est pas non plus nilpotente. Finalement, *l'algèbre* $\mathrm{Der}_K(A)$ *n'est pas semi-simple.*

Bibliographie

1. S. Bernstein, 'Démonstration mathématique de la loi d'hérédité de Mendel', *C.R. Acad. Sci. Paris* 177 (1923) 528–531.

2. S. Bernstein, 'Principe de stationarité et généralisations de la loi de Mendel', *C.R. Acad. Sci. Paris* 177 (1923) 581–584.

3. S. Bernstein, 'Solution of a mathematical problem connected with the theory of heredity', *Ann. Sci. de l'Ukraine* 1 (1924) 83–114; *Ann. Math. Statist.* 13 (1942) 53–61.

4. N. Bourbaki, *Algèbre* (Hermann, Paris, 1959), chapitres 4 et 5.

5. R. Costa, 'On the derivations of gametic algebras for polyploidy with multiple alleles', *Bol. Soc. Brasil. Mat.* 13 (1982) 69–81.

6. R. Costa, 'On the derivation algebras of zygotic algebras for polyploidy with multiple alleles', *Bol. Soc. Brasil. Mat.* 14 (1983) 63–80.

7. P. Holgate, 'Genetic algebras satisfying Bernstein's stationarity principle', *J. London Math. Soc.* (2) 9 (1975) 613–623.

8. Yu. I. Lyubich, 'Basic concepts and theorems of evolution genetics of free populations', *Uspekhi Mat. Nauk* 26, 5 (161) (1971) 51–116; *Russian Math. Surveys* 26, 5 (1971) 51–123.

9. A. Micali et O. E. Villamayor, 'Sur les algèbres de Clifford', *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 1 (1968) 271–304.

10. A. Micali, T. M. M. Campos, M. C. Costa e Silva, S. M. M. Ferreira, et R. C. F. Costa, 'Dérivations dans les algèbres gamétiques', *Comm. Algebra* (2) 12 (1984) 239–243.

11. A. Micali, T. M. M. Campos, M. C. Costa e Silva, et S. M. M. Ferreira, 'Dérivations dans les algèbres gamétiques II', *Linear Algebra Appl.* 64 (1985) 175–181.

12. R. D. SCHAFER, *An introduction to nonassociative algebras* (Academic Press, New York, 1966).
13. A. WÖRZ-BUSEKROS, *Algebras in genetics*, Lecture Notes in Biomathematics 36 (Springer, Berlin, 1980).

M. T. Alcalde and C. Burgueño
Departamento de Matemática y Estadística
Facultad de Ingeniería
Universidad de La Frontera
Casilla 54-*D*
Temuco
Chile

A. Labra
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias
Universidad de Chile
Casilla 653
Santiago
Chile

A. Micali
Institut de Mathématiques
Université de Montpellier II
Place Eugène Bataillon
34060 *Montpellier*
France