NORTH-HOLLAND

Morphismes de Peirce et Orthogonalité Dans les Algèbres de Bernstein*

C. Burgueño

Departamento de Matemáticas y Estadística
Facultad de Ingenería
Universidad de la Frontera
Casilla 54-D
Temuco, Chile

and

C. Mallol

Département de Mathématiques et Informatique Appliquées
Université de Montpellier III
BP 5043 34032, Cedex 1, France

Submitted by Richard A. Brualdi

ABSTRACT

Nous étudions le lien entre les transformations de Peirce (transport d'écriture) et les automorphismes (transport de structure) d'une algèbre de Bernstein d'ordre 1. Nous finissons par quelques réflexions sur l'orthogonalité et sur la "non" orthogonalité en dimension 6.

1. INTRODUCTION

Soit K un corps. Une algèbre de Bernstein d'ordre n est la donnée de (A, ω) où A est une K-algèbre et $\omega : A \to K$ une pondèration non nulle telle

*Subventionné par la Coopération Française, FONDECYT 165–91 et DIUFRO 9010.

LINEAR ALGEBRA AND ITS APPLICATIONS 219:179–186 (1995)

655 Avenue of the Americas, New York, NY 10010

0024-3795/95/$9.50
SSDI 0024-3795(93)00209-I

que $\forall x \in A$ on a: $x^{[n+2]} = \omega(x)^{2^n} x^{[n+1]}$, où $x^{[2]} = x^2$ et $x^{[k+1]} = (x^{[k]})^2$. Dans ces algèbres l'ensemble des idempotents est $\mathrm{Ip}(A) = \{x^{[n+1]} \mid \omega(x) = 1\}$. Le choix de $e \in \mathrm{Ip}(A)$ permet la décomposition de Peirce $A = Ke \oplus \mathrm{Ker}\omega$; si $\mathrm{car}\, K \neq 2$, $\mathrm{Ker}\,\omega = U \oplus V$ avec $U = \{u \in A \mid \mathrm{eu} = \frac{1}{2}u\}$ et $V = \{v \in A \mid L_e^n(v) = 0\}$. Certaines propriétés vérifiées par une décomposition ne sont pas forcément retrouvées si on change d'idempotent, ainsi, par exemple la notion d'orthogonalité (cf. [2]).

Les transformations de Peirce (cf. [5]) servent à décrire le passage entre deux décompositions et, classiquement, on appelle invariant de structure les propriétées stables sous l'action de ces applications.

La détermination du groupe $\mathrm{Aut}_K(A)$ reste un problème ouvert pour $n \geq 1$ (cf. [1]). Pour $n = 0$, on sait qu'il est isomorphe au groupe affine $K^n \rtimes \mathrm{GL}_n(K)$ (cf. [7] et [8]).

2. PRÉLIMINAIRES

Soient K un corps, $\mathrm{car}\, K \neq 2, 3$, A une K-algèbre de Bernstein d'ordre 1, $e \in \mathrm{Ip}(A)$ et $Ke \oplus U \oplus V$ la décomposition de A par rapport à l'idempotent e.

Par la suite, nous aurons besoin des rèsultats suivants bien connus (cf. [1, 4, 9]):

PROPOSITION 2.1.

(1) $UV \subseteq U$, $U^2 \subseteq V$, $V^2 \subseteq U$ et $UV^2 = \{0\}$.
(2) $x^2(xy) = 0$ $\forall x, y \in \mathrm{Ker}\,\omega$.
(3) $s(uv) + u(sv) = 0$ $\forall s, u \in U$, $v \in V$.
(4) $(uv)^2 = u^2v^2 = 0$ $\forall u \in U$, $v \in V$.
(5) $s(ut) + u(ts) + t(su) = 0$ $\forall s, u, t \in U$ *(identité de Jacobi).*

Ces identités et relations seront *constamment* utilisées dans les réductions des égalités, sans en faire mention. Le lecteur fera bien de les avoir à côté.

REMARQUE 2.2. La proposition 2.1 permet d'établir que $\mathrm{Ip}(A) = \{e + s + s^2 \mid s \in U\}$. On note $e_s = e + s + s^2$; il est clair que l'application $U \to \mathrm{Ip}(A), s \to e_s$, est bijective. Si $Ke_s \oplus U_s \oplus V_s$ est la décomposition de Peirce relative à e_s, on a $U_s = \{u_s = u + 2su \mid u \in U\}$ et $V_s = \{v_s = v - 2(s + s^2)v \mid v \in V\}$.

Les transformations de Peirce associées à l'idempotent e, sont les applications $\varphi_s : A \to A$, définies par $\varphi_s(\lambda e + u + v) = \lambda e_s + u_s + v_s, \lambda \in K$ (cf. [5]). Elles sont linéaires et bijectives. Pour simplifier l'écriture on notera $\varphi_s(x) = x_s$ [on a, donc, $(x + y)_s = x_s + y_s$ et $x_s = 0 \Leftrightarrow x = 0$]. Enfin, on note P_s l'ensemble des transformations de Peirce qui émergent de la décomposition déterminée par e_s, i.e., $P_s = \{\varphi_{u_s} \mid u_s \in U_s\}$.

On en convient que $e_0 = e, U_0 = U, V_0 = V$ et $P_0 = P$.
Le dictionnaire de passage d'une écriture à l'autre est:

PROPOSITION 2.3.

(1) $e = e_s - s_s + s_s^2$.
(2) $u = (u + 2s^2u)_s - 2(su)_s$.
(3) $v = 2[(s + s^2)v]_s + v_s$. *De plus*, $\forall u, t \in U, (ut)_s = u_s t_s$.

DÉMONSTRATION. Montrons (2): soient $u, s \in U$. On a $u = u_s - 2su$, or, $(su)_s = su - 2(s + s^2)(su) = su - 2s(su) = su + s^2u$ (identité de Jacobi) et comme $(s^2u)_s = s^2u$ on obtient $su = (su)_s - (s^2u)_s$ d'où le résultat. Quant à la dernière affirmation, comme $\operatorname{car} K \neq 2$ il suffit de voir que $(u^2)_s = u_s^2$. ∎

RAPPEL 2.3. L'algèbre A est *orthogonale* s'il existe un idempotent e telle que $U^3 = \{0\}$ (cf. [2]); si ceci est un invariant de structure (i.e. si $U_s^3 = \{0\}$ $\forall s \in U$) on dit que A est *totalement-orthogonale* (ceci est équivalent à: $U^3 = (U^2)^2 = \{0\}$, cf. [3]). De même, si aucun idempotent ne vérifie cette propriété on dira que l'algèbre est *jamais-orthogonale.*

3. AUTOMORPHISMES ET TRANSFORMATIONS DE PEIRCE

Soit $\varphi \in \operatorname{Aut}_K(A)$; comme $\varphi(e) \in \operatorname{Ip}(A)$ il existe $s \in U$ tel que $\varphi(e) = e_s$. Il s'ensuit que $\varphi(U) = U_s$ et $\varphi(V) = V_s$. Ceci veut dire que φ se décompose de façon unique par $\varphi = \varphi_s \circ f$, $f : A \to A$ linéaire bijective telle que $f(e) = e$.

De façon générale, pour tout $s \in U$, soit F_s l'ensemble défini par $F_s = \{f = \varphi_{t_s}^{-1} \circ \varphi \mid t \in U,\ \varphi \in \operatorname{Aut}_K(A), \varphi(e_s) = (e_s)_{t_s}\}$.

Par convention, on pose $F_0 = F$. Il est immédiat que $F \cap P = \{\mathrm{Id}\}$.

Les transformations de Peirce ne sont pas en général multiplicatives, ni les ensembles P_s stables par composition d'applications. Les résultats qui suivent précisent le lien entre ces situations et le sort relativement analogue des ensembles P et F.

THÉORÈME 3.1. *Les conditions suivantes sont équivalentes*: (1) $P \subseteq \mathrm{Aut}_K(A)$; (2) $U^2 \subseteq \mathrm{Ann}(V)$ et $v(vU) = \{0\}$ $\forall v \in V$.

DÉMONSTRATION. (1) $\Rightarrow$ (2): Soient $s \in U$ et $v \in V$. De $\varphi_s(sv) = \varphi_s(s)\varphi_s(v)$ on obtient $sv + 2(sv)s = (s + 2s^2)[v - 2(s + s^2)v]$ d'où, comme car $K \neq 2, s^2v = 0$; si $u \in U$, de $(s+u)^2v = 0$ on obtient $(su)v = 0$. Ceci prouve que $U^2 \subseteq \mathrm{Ann}(V)$. Fort de ce résultat, le reste vient facilement de l'égalite $\varphi_s(v^2) = \varphi_s(v)^2$. La réciproque se fait sans problèmes. ∎

THÉORÈME 3.2. *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

(1) $\forall s \in U, P_s = P$.
(2) $U^3 = U(UV) = U^2V = \{0\}$.
(3) $\forall s,\ t \in U,\ \varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$.
(4) $\forall s,\ t \in U$ il existe $u \in U$ tel que $\varphi_s \circ \varphi_s = \varphi_u$.

DÉMONSTRATION. (1) $\Rightarrow$ (2): Soient $s, t \in U$; $t_s \in U_s$. Par hypothèse il existe $u \in U$ tel que $\varphi_{t_s} = \varphi_u$.
On a:

$$\begin{aligned} e_s + t_s + t_s^2 &= \varphi_{t_s}(e_s) = \varphi_u(e_s) = \varphi_u(e + s + s^2) \\ &= e + u + u^2 + s + 2su + s^2 - 2(u + u^2)s^2. \end{aligned}$$

Mais, par la proposition 2.3:

$$e + u + u^2 + s + 2su + s^2 - 2(u + u^2)s^2 = e_s + (u - 2s^2u + 2su^2)_s + u_s^2$$

donc

$$e_s + t_s + t_s^2 = e_s + (u - 2s^2u + 2su^2)_s + u_s^2$$

d'où

$$t = u - 2s^2u + 2su^2 \quad \text{et} \quad t^2 = u^2. \tag{a}$$

En multipliant par s la première identité de (a), on obtient $st = su$ d'où $s^2t = s^2u$. Ainsi $t = u - 2s^2t + 2st^2$, cest-à-dire

$$u = t + 2s^2t - 2st^2. \tag{b}$$

D'autre part, en appliquant la proposition 2.3

$$\varphi_{t_s}(s) = \varphi_{t_s}(s_s - 2s_s^2)$$

$$\begin{aligned} &= s_s + 2t_s s_s - 2s_s^2 + 4(t_s + t_s^2)s_s^2; && \text{(c)} \\ \varphi_u(s) &= s + 2su = s + 2st \\ &= (s - 2s^2t)_s - 2(s^2 - st)_s && \text{(d)} \end{aligned}$$

En comparant les termes de U_s dans l'égalite (c) $=$ (d), il en résulte $2(t_s + t_s^2)s_s^2 = -(s^2t)_s$; or $2(t_s + t_s^2)s_s^2 = 2(t + 2st + t^2 - 2(s + s^2)t^2)s^2 = 2(t + t^2)s^2$ et $(s^2t)_s = s^2t$, donc $-s^2t = 2(t + t^2)s^2$ c'est-à-dire

$$3s^2t + 2s^2t^2 = 0 \tag{e}$$

Mais s et t jouent un rôle symétrique (en prénant φ_{s_t} à la place de φ_{t_s}) donc de (e) on obtient $3st^2 + 2s^2t^2 = 0$ d'où

$$s^2t = st^2. \tag{f}$$

Comme s et t sont arbitraires en changeant s par $2s$ dans (f) il en résulte $s^2t = st^2 = 0$ donc $s^2t^2 = 0$. Ceci montre que $U^3 = (U^2)^2 = \{0\}$. Il en découle aussi, par (b), que $u = t$. Soit $v \in V$; on a:

$$\varphi_t(v_s) = \varphi_t(v - 2(s + s^2)v) = v - 2(t + t^2)v - 2(s + s^2)v - 4(sv)t \tag{g}$$

et, en tenant compte de que $U^3 = \{0\}$,

$$\begin{aligned} \varphi_{t_s}(v_s) &= v_s - 2(t_s + t_s^2)v_s \\ &= v - 2(s + s^2)v - 2(t + 2ts + t^2)[v - 2(s + s^2)v] \\ &= v - 2(s + s^2)v - 2tv + 4t(sv) - 4(ts)v. && \text{(h)} \end{aligned}$$

De $(g) = (h)$ obtient $4(ts)v - 2t^2v - 8t(sv) = 0$ donc $t(sv) = 0$ et $2(ts)v = t^2v$. La première identité montre que $U(UV) = \{0\}$ et la seconde, s et t étant quelconques (on prend $s = t$, par exemple), que $U^2V = \{0\}$.

Que (2) $\Rightarrow$ (3) s'obtient sans difficulté an calculant $(\varphi_s \circ \varphi_t)(e)$, $(\varphi_s \circ \varphi_t)(u)$ et $(\varphi_s \circ \varphi_t)(v)$ avec $u \in U$ et $v \in V$.

Montrons (3) $\Rightarrow$ (2): soient $u \in U$ et $v \in V$. De $(\varphi_s \circ \varphi_t)(u) = \varphi_{s+t}(u)$ on a $u + 2su + 2tu - 4(s + s^2)(tu) = u + 2(s + t)u$ ce qui donne

$$s(tu) + s^2(tu) = 0 \ (*).$$

Si on prend $s = t$, il en découle que $s^2u = 0$ donc $U^3 = (U^2)^2 = \{0\}$. De ce fait, $(*)$ devient $s^2(tu) = 0$, d'où $(U^2)^2 = \{0\}$. Pour finir, de $(\varphi_s \circ \varphi_t)(v) = \varphi_{s+t}(v)$, on a $v - 2(s + s^2)v - 2(t + t^2)v - 4[(t + t^2)v]s = v - 2(s + t + s^2 + 2st + t^2)v$ d'où $(tv)s = (st)v = 0$ [car $(tv)s \in V$ et $(st)v \in U$]. Ceci prouve que $U(UV) = U^2V = \{0\}$.

Quant à (2) $\Rightarrow$ (1), il suffit de montrer que $\forall s,t \in U$, $\varphi_{t_s} = \varphi_t$. Ceci est obtenu sans difficulté en appliquant φ_{t_s} et φ_t sur e, u et v, en tenant compte que sous les conditions de l'hypothèse, $(s^2)_s = s^2$, $(su)_s su$ et $(sv)_s = sv$.

Que (3) $\Rightarrow$ (4) est immédiat. Montrons (4) $\Rightarrow$ (3): si $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_u$ alors $\varphi_s(\varphi_t(e)) = \varphi_u(e)$ entraine que $u = s + t - 2(s+s^2)t^2$ et $u^2 = (s+t)^2$; de même, de $\varphi_s(\varphi_t(t)) = \varphi_u(t)$, on en déduit que $(s+s^2)t^2 = [(s+s^2)t^2]t$ donc que $(s+s^2)t^2 = 0$ d'où $u = s + t$. ■

Le théorème 3.2 nous dit que sous ces conditions l'algèbre admet un unique ensemble de Peirce, isomorphe au groupe $(U,+)$ par l'application $s \to \varphi_s$. Mais P n'est pas forcément sous-groupe de $\mathrm{Aut}_K(A)$. Cependant,

COROLLAIRE 3.3.

(1) *Si A vérifie les conditions du théorème* 3.2 *elle est totalement orthogonale.*
(2) *Si A est nucléaire totalement orthogonale, elle satisfait les conditions des théorèmes* 3.1 *et* 3.2.

DÉMONSTRATION. (1): On a $U^3 = \{0\}$ et $(U^2)^2 \subseteq U^2V = \{0\}$. L'affirmation (2) est aussi immédiate.

On finit ce paragraphe en considérant que A est une algèbre *vérifiant* les théorèmes 3.1 et 3.2, c'est-à-dire, P est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}_K(A)$.

THÉORÈME 3.4

(1) *Pour tout $s \in U$, F_s est un sous-groupe de* $\mathrm{Aut}_K(A)$, *image isomorphique de F par action de* $\mathrm{int}\,\varphi_s$.
(2) *P est invariant et* $\mathrm{Aut}_K(A)/P \simeq F$.
(3) $\mathrm{Aut}_K(A)$ *est isomorphe au produit semi-direct* $U \rtimes F$.

DÉMONSTRATION Remarquons d'abord que si $f \in F$ et $\varphi_s \in P$, alors $f \circ \varphi_s = \varphi_{f(s)} \circ f$ donc

$$\varphi_s \circ f = f \circ \varphi_{f^{-1}(s)} \quad (*):$$

il suffit d'appliquer $f \circ \varphi_s$ et $\varphi_{f(s)} \circ f$ sur e, $u \in U$ et $v \in V$.

Montrons (1): on a $F_s \subseteq \mathrm{Aut}_K(A)$ car $P_s = P \subseteq \mathrm{Aut}_K(A)$. De ce fait, si $g \in F_s$ est tel que $g(e) = e_u$ alors il existe $f \in F$ tel que $g = \varphi_u \circ f$. Or, par définition, $g(e_s) = e_s$, c'est-à-dire $(\varphi_u \circ f)(e_s) = e_s$ d'où $u = s - f(s)$. Ainsi, $g = \varphi_{s-f(s)} \circ f = \varphi_{s-f(s)} \circ \varphi_{f(-s)} \circ f$ et, par $(*)$, $g = \varphi_s \circ f \circ \varphi_{-s}$. Ceci veut dire que F_s est l'image de F par l'automorphisme interieur associé à

φ_s. Enfin, que F est un sous-groupe $\mathrm{Aut}_K(A)$ découle sans problèmes en utilisant $(*)$.

Quant à (2), soit $\psi \in \mathrm{Aut}_K(A)$; on sait que $\psi = \varphi_t \circ g$, avec $g \in F$ et $\varphi_t \in P$. On a: $\psi \circ \varphi_s \circ \psi^{-1} = \varphi_t \circ g \circ \varphi_s \circ g^{-1} \circ \varphi_{-t} = \varphi_t \circ \varphi_{g(s)} \circ \varphi_{-t} = \varphi_{g(s)}$ ce qui montre que P est invariant. Puis, si $\varphi = \varphi_t \circ f$ et $\psi = \varphi_t \circ g$ alors $\varphi \circ \psi^{-1} = \varphi_u \circ f \circ g^{-1}$ avec $u = s - (f \circ g^{-1})(t)$. Ainsi, si $\varphi \circ \psi^{-1} \in P$ alors $f \circ g^{-1} \in P$ et donc $f = g$ car $F \cap P = \{\mathrm{Id}\}$. C'est-à-dire, les classes d'équivalences $\mathrm{Mod}(P)$ sont de la forme Pf, donc la restriction à F de la projection canonique $\mathrm{Aut}_K(A) \to \mathrm{Aut}_K(A)/P$ est bijective, ce qui montre l'isomorphisme $\mathrm{Aut}_K(A)/P \simeq F$.

En ce qui concerne (3), comme $f \circ \varphi_s = \varphi_{f(s)} \circ f$, $\forall f \in F$ et $\varphi_s \in P$, l'application $\mathrm{Aut}_K(A) \to U \rtimes F$, définie par $\varphi \to (s, f)$, où $\varphi = \varphi_s \circ f$, établit l'isomorphisme demandé, le produit dans $U \rtimes F$ étant donné par $(s, f)(t, g) = (s + f(t), f \circ g)$. ∎

COROLLAIRE 3.5. *Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

(1) *Pour tout* $f \in F$, $f_U = Id$.
(2) *Pour tout* $f \in F$, $f_{\mathrm{Ip}(A)} = Id$.
(3) *Pour tout* $s \in U$, $F_s = F$.
(4) F *est un sous-groupe invariant.*

Dans ces conditions, $\mathrm{Aut}_K(A)/F \simeq P$.

4. COMPLÉMENTS SUR L'ORTHOGONALITÉ

Soient A une algèbre de Bernstein d'ordre 1 et $Ke \oplus U \oplus V$ sa décomposition de Peirce par rapport à l'idempotent e.

PROPOSITION 4.1. *Les affirmations suivantes sont équivalentes:*

(1) *Il existe une décomposition orthogonale de* A.
(2) *Il existe* $s \in U$ *tel que* u, w, $t \in U$, *on a* $u(wt) = -2(su)(wt)$.

DÉMONSTRATION. Il existe $s \in U$, $U_s^3 = \{0\} \Leftrightarrow u_s(w_s t_s) = 0 \Leftrightarrow u_s(wt)_s = 0$ (Proposition 2.3), $\Leftrightarrow (u + 2su)[wt - 2(s + s^2)(wt)] = 0 \Leftrightarrow u(wt) = -2(su)(wt)$ (Proposition 2.1). La suite d'équivalences étant faite $\forall u, w, t \in U$. ∎

REMARQUE 4.2. Dans [2] les auteurs montrent que toute algèbre de Bernstein d'ordre 1 de dimension ≤ 5 est totalement orthogonale et ils exhibent un exemple d'une algèbre A_b paramétrisée de dimension 6, $A_b = Ke \oplus U \oplus V$ telle que $U^3 \neq \{0\}$. Les produits non nuls dans $U \oplus V$ étant: $u_1^2 = v_1$, $u_1u_3 = v_2$, $u_1v_2 = -\frac{1}{2}u_2$, $u_3^2 = (b^2/4)v_1 + bv_2$, $u_3v_1 = u_2$, $u_3v_2 = (b/4)u_2$. Ces algèbres sont nucléaires (i.e. $V = U^2$) et $U(UV) = \{0\}$; les conditions du théorème 3.1 sont vérifiées, mais pas celles du théorème 3.2 car $U^3 \neq \{0\}$. Nous avons ici un exemple où P n'est pas un groupe mais il est contenu dans $\mathrm{Aut}_K(A)$. De ce fait, $U_s^3 \neq \{0\}$ $\forall s \in U$; il s'agit donc d'algèbres jamais-orthogonales. Par ailleurs, de la méthode utilisée par les auteurs découle que celles-ci sont toutes les algèbres jamais-orthogonales en dimension 6. Cette famille peut se réduire à deux cas: A_0 et A_1. En effet, si $b \neq 0$, il suffit de changer u_2 par $(1/b)u_2$, u_3 par $(1/b)u_3$ et v_2 par $(1/b)v_2$.

Nous remercions les commentaires et conseils du Referee; ils nous ont été plus qu'utiles.

REFERENCES

1 M. T. Alcalde, C. Burgueño, A. Labra et A. Micali, Sur les algèbres de Bernstein, *Proc. London Math. Soc. (3)* 58:51–68 (1989).
2 M. T. Alcalde, R. Baeza et C. Burgueño, Autour des algèbres de Bernstein, *Arch. Math. (Basel)* 53:134–140 (1989).
3 C. Burgueño, M. Neuburg et A. Suazo, Totally orthogonal Bernstein Algebra, *Arch. Math. (Basel)* 56:349–351 (1991).
4 Ph. Holgate, Genetic algebras satisfying Bernstein's stationarity principle, *J. London Math. Soc. (2)* 9:613–623 (1975).
5 C. Mallol, A Propos des Algèbres de Bernstein, Thèse de Doctorat d'Etat, U.S.T.L., Montpellier, 1989.
6 C. Mallol, A. Micali et M. Ouattara, Sur les algèbres de Bernstein. IV, *Linear Algebra Appl.*, 158:1–26 (1991).
7 A. Micali et P. Revoy, Sur les algèbres gametiques, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 29:187–197 (1986).
8 A. Peresi, Baric algebras with prescribed automorphisms, *Linear Algebra Appl.*, 78:163–185 (1986).
9 A. Wörz, *Algebras in Genetics*, Lectures Notes in Biomath. 36, Springer-Verlag, 1980.

Received 14 February 1993; final manuscript accepted 23 June 1993