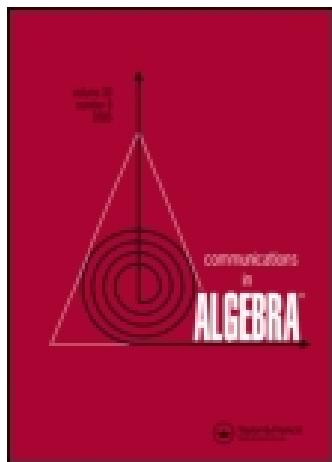


This article was downloaded by: [The UC Irvine Libraries]

On: 28 February 2015, At: 16:41

Publisher: Taylor & Francis

Informa Ltd Registered in England and Wales Registered Number: 1072954 Registered office: Mortimer House, 37-41 Mortimer Street, London W1T 3JH, UK



Communications in Algebra

Publication details, including instructions for authors and subscription information:
<http://www.tandfonline.com/loi/lagb20>

Dérivations de Peirce et structure d'algèbre

Cristián Mallol^a

^a Departamento de Matemática y Estadística, Universidad de La Frontera, Casilla, Temuco Chile, 54-D E-mail:

Published online: 27 Jun 2007.

To cite this article: Cristián Mallol (1998) Dérivations de Peirce et structure d'algèbre, Communications in Algebra, 26:12, 4149-4157, DOI: [10.1080/00927879808826400](https://doi.org/10.1080/00927879808826400)

To link to this article: <http://dx.doi.org/10.1080/00927879808826400>

PLEASE SCROLL DOWN FOR ARTICLE

Taylor & Francis makes every effort to ensure the accuracy of all the information (the "Content") contained in the publications on our platform. However, Taylor & Francis, our agents, and our licensors make no representations or warranties whatsoever as to the accuracy, completeness, or suitability for any purpose of the Content. Any opinions and views expressed in this publication are the opinions and views of the authors, and are not the views of or endorsed by Taylor & Francis. The accuracy of the Content should not be relied upon and should be independently verified with primary sources of information. Taylor and Francis shall not be liable for any losses, actions, claims, proceedings, demands, costs, expenses, damages, and other liabilities whatsoever or howsoever caused arising directly or indirectly in connection with, in relation to or arising out of the use of the Content.

This article may be used for research, teaching, and private study purposes. Any substantial or systematic reproduction, redistribution, reselling, loan, sub-licensing, systematic supply, or distribution in any form to anyone is expressly forbidden. Terms & Conditions of access and use can be found at <http://www.tandfonline.com/page/terms-and-conditions>

Dérivations de Peirce et structure d'algèbre

Cristián Mallol*

*Departamento de Matemática y Estadística
Universidad de La Frontera
Casilla 54-D, Temuco Chile
cmallol@werken.ufro.cl*

Dans ce travail nous analysons la structure d'une algèbre, sous la condition d'existence d'un espace, suffisamment grand, de dérivations qui inversent la décomposition de Peirce.

1. INTRODUCTION

Dans [1] et [2] nous avons étudié, sous certaines conditions, la structure des automorphismes et des dérivations d'une algèbre de Bernstein en utilisant des applications issues et/ou inspirées des décompositions de Peirce. Après, en regardant sous la même optique d'autres types d'algèbres, nous avons trouvé des comportements structurels d'un parallélisme et d'une similitude très grande (voir [3] et [7]).

Grosso modo, les résultats obtenus peuvent se "résumer" par le fait que l'ensemble P des transformations de Peirce est un sous-groupe invariant de $\text{Aut}(A)$, l'ensemble DP des dérivations de Peirce est un idéal de $\text{Der}(A)$. De plus, $\text{Aut}(A) \cong P \times F$ (produit semi-direct) et $\text{Der}(A) = \Delta \oplus DP$, où F est le groupe des automorphismes qui fixent l'idempotent e (qui engendre la décomposition de Peirce $Ke \oplus U \oplus V$) et Δ est l'ensemble des dérivations qui l'annulent.

Cette frappante régularité nous a amené à étudier le problème "à l'envers", c'est-à-dire, à voir quel phénomène de structure produisait de tels résultats. Nous verrons par la suite que ceci vient du fait d'imposer certaines conditions sur les dérivations d'une algèbre.

* Subventionné par Fondecyt 1950778, 1970890 et Diufro 9516.

2. PRELIMINAIRES

Soient K un corps de caractéristique nulle, A une K -algèbre commutative, $e \in \text{Ip}(A)$ un idempotent non nul, $l_e: A \rightarrow A$ le produit par e et $d \in \text{Der}(A)$ une dérivation. On rappelle que:

2.1. Proposition. Si $d(e) = 0$, les sous-espaces propres associés à l_e sont stables par d .

Démonstration. Si $ex = \mu x$ avec $\mu \in K$, on a: $d(ex) = ed(x) + d(e)x = ed(x) = \mu d(x)$.

Si $d(e) \neq 0$, du fait que $d(e) = d(e^2) = 2ed(e)$ il en résulte que $\frac{1}{2}$ est dans le spectre de l_e . Si de plus, $d(e)^2$ et $d^2(e)$ sont liés linéairement de manière non triviale, l_e peut admettre plusieurs valeurs propres. Plus précisément on a:

2.2. Proposition. Si $d(e)^m \neq 0$ pour un entier $m > 1$ et si $d(e)^2 = \lambda d^2(e)$, alors l_e admet au moins m valeurs propres.

Démonstration. Par récurrence on montre que $(n-1)!d(e)^n = \lambda^{n-1}d^n(e)$, puis que $ed^n(e) = \mu_n d^n(e)$ où $\mu_0 = \frac{1}{2}$ et $\mu_{n+1} = \mu_n - \lambda/\mu_n$; comme $\lambda \neq 0$ on a $\mu_n \neq \mu_k$.

3. LES DERIVATIONS DE PEIRCE

Maintenant, nous allons nous situer dans le contexte des résultats développés dans [1], [3] et [7]. Nous nous intéressons donc, aux algèbres ayant une décomposition de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus V$, où U et V sont les sous-espaces propres liés aux valeurs $\frac{1}{2}$ et γ (bien entendu, $\gamma \neq \frac{1}{2}$). Soit $d \in \text{Der}(A)$: si $d(e) = 0$, la proposition 2.1 nous dit que $d(U) \subset U$ et $d(V) \subset V$. Si on se place dans les conditions de la proposition 2.2, il s'ensuit que $d(e) \in U$, $d^2(e) \in V$ et $d^3(e) = 0$. Ces considérations nous mènent à définir les ensembles:

$$\Delta = \{\delta \in \text{Der}(A) / \delta(e) = 0\}, DP = \{\partial \in \text{Der}(A) / \partial(U) \subset V, \partial(V) \subset U\}$$

3.1. Proposition.

- a) Δ et DP sont des sous-espaces vectoriels vérifiant $\Delta \cap DP = \{0\}$.
 b) L'application $\Phi: DP \rightarrow U$, $\partial \rightarrow \partial(e)$, est un monomorphisme.

Démonstration. La structure d'espace vectoriel de Δ et DP est immédiate. Puis, si $d \in \Delta \cap DP$, des définitions de Δ et DP il résulte que $d(e) = 0$, $d(U) \subset U \cap V$ et $d(V) \subset U \cap V$, d'où l'énoncé. Quant à (b), vu (a), il est clair que $\text{Ker}(\Phi) = \{0\}$.

On appelle DP l'espace des dérivations de Peirce (ceci va se justifier plus loin). Pour être totalement dans l'esprit de [1], [3] et [7], nous allons proposer:

3.2. Conditions.

a) L'espace DP est suffisamment grand: plus précisément, on impose que l'application $\Phi: DP \rightarrow U$ soit un isomorphisme.

b) Le crochet de Lie est nul sur DP , c'est-à-dire, $[DP, DP] = \{0\}$.

La condition 3.2.(a) permet de paramétrer l'espace DP de la façon suivante: $DP = \{\partial_\sigma / \sigma \in U\}$ avec $\Phi^{-1}(\sigma) = \partial_\sigma$.

3.3. Proposition. Sous la condition 3.2.(a), $Der(A) = \Delta \oplus DP$. Si de plus on ajoute 3.2.(b), alors DP est un idéal abélien de $Der(A)$ et $\Delta \cong Der(A)/DP$.

Démonstration. Soit $d \in Der(A)$; comme $d(e) = d(e^2) = 2ed(e)$ alors $d(e) \in U$; il s'ensuit que $d - \partial_{d(e)} \in \Delta$, d'où la première affirmation. Quant à la seconde, fort des hypothèses $Der(A) = \Delta \oplus DP$ et $[DP, DP] = \{0\}$, il suffit de regarder $[\Delta, DP]$: si $\delta \in \Delta$ et $\partial_\sigma \in DP$, on a $(\delta \cdot \partial_\sigma)(e) = \delta(\sigma)$, $(\delta \cdot \partial_\sigma)(U) = \delta((\partial_\sigma)(U)) \subset \delta(V) \subset V$ et $(\delta \cdot \partial_\sigma)(V) = \delta((\partial_\sigma)(V)) \subset \delta(U) \subset U$; de la même façon, $(\partial_\sigma \cdot \delta)(e) = 0$, $(\partial_\sigma \cdot \delta)(U) \subset V$ et $(\partial_\sigma \cdot \delta)(V) \subset U$; tout ceci prouve que $\delta \cdot \partial_\sigma - \partial_\sigma \cdot \delta = [\delta, \partial_\sigma] = \partial_{\delta(\sigma)}$, d'où $[\Delta, DP] \subset DP$. Enfin, l'affirmation $\Delta \cong Der(A)/DP$ découle des deux premières.

4. SUR LA STRUCTURE DE L'ALGÈBRE

Dorénavant nous adoptons les conditions énoncées dans 3.2.

Dans ce qui suit, nous verrons comment l'existence de cet idéal DP "assez grand" détermine en grande partie le comportement multiplicatif de l'algèbre. On pose: $\alpha = (1-2\gamma)^{-1}$. Nous avons:

4.1. Proposition. Soit $\partial_\sigma \in DP$. Alors, $\partial_\sigma(\lambda e + u + v) = \lambda\sigma + 2\alpha\sigma u - 2\alpha\sigma v$.

Démonstration. On sait que $\partial_\sigma(e) = \sigma$; pour le reste, il suffit d'appliquer la dérivation ∂_σ sur les identités $2eu = u$ et $ev = \gamma v$.

4.2. Corollaire. On a: $U^2 \subset V$, $UV \subset U$.

Démonstration. La proposition précédente nous dit que $\partial_\sigma(u) = 2\alpha\sigma u$ et $\partial_\sigma(v) = -2\alpha\sigma v$. Or comme $\alpha \neq 0$, par la définition de DP on déduit que $\sigma u \in V$ et $\sigma v \in U$; puis, en tenant compte de 3.2.(a), ceci est vérifié pour tout $\sigma \in U$. Il en découle que $U^2 \subset V$, $UV \subset U$.

4.3. Proposition. Pour tout $\sigma, u \in U$ et $v \in V$, $\sigma u^2 = 0$ et $(\sigma u)v = 2\sigma(uv)$.

Démonstration. Comme $u^2 \in V$, en calculant $\partial_\sigma(u^2) = 2u\partial_\sigma(u)$ on obtient $\sigma u^2 = -2u(\sigma u)$; puis, de $[\partial_u, \partial_\sigma](u) = 0$ sort $\sigma u^2 = u(\sigma u)$, d'où $\sigma u^2 = 0$. Puis, comme

$uv \in U$, de $\partial_\sigma(uv) = \partial_\sigma(u)v + u\partial_\sigma(v)$ sort $(\sigma u)v = \sigma(uv) + u(\sigma v)$ et de $[\partial_u, \partial_\sigma](v) = 0$ découle $\sigma(uv) = u(\sigma v)$, d'où $(\sigma u)v = 2\sigma(uv)$.

4.4. Corollaire. $U^2V = U(UV) \subset V$ et $U^3 = (U^2)^2 = \{0\}$.

Démonstration. La première affirmation sort de $(\sigma u)v = 2\sigma(uv)$ et du fait que $UV \subset U$ et $U^2 \subset V$. Que $U^3 = \{0\}$ s'établit directement par $\sigma u^2 = 0$. La dernière affirmation en découle en faisant $(U^2)^2 = U^2U^2 \subset U(UU^2) = UU^3 = \{0\}$.

5. LES TRANSFORMATIONS DE PEIRCE

Par la suite, via les dérivations de Peirce, nous allons introduire les transformations de Peirce, morphismes qui classiquement servent à établir le dictionnaire de passage entre les décompositions associées à deux idempotents (voir [2] et [3]).

On rappelle que pour une application d , s'il ne se pose pas de problèmes de convergence, l'exponentielle est donnée par: $\exp(d) = \sum d^n/n!$.

5.1. Proposition. Soient h, k deux entiers, $h+k > 2$. Pour tout $\partial_\sigma, \partial_\theta \in DP$ et $x, y \in A$, on a: $\partial_\sigma^h \cdot \partial_\theta^k = 0$ et $\partial_\sigma^h(x)\partial_\theta^k(y) = 0$.

Démonstration. Montrons d'abord que pour tout $\sigma \in U$, on a $\partial_\sigma^3 = 0$. En effet, $\partial_\sigma^3(e) = -4\alpha^2\sigma^3$, $\partial_\sigma^3(u) = -8\alpha^3\sigma(\sigma\sigma u)$ et $\partial_\sigma^3(v) = 8\alpha^3\sigma(\sigma\sigma v)$; or, toutes ces expressions sont nulles du fait que $U^3 = \{0\}$ et $UV \subset U$. Il reste à tester les expressions du type $\partial_\sigma^h \cdot \partial_\theta^k$ et $\partial_\sigma^h(x)\partial_\theta^k(y)$ avec $h, k < 3$. Par exemple, $\partial_\sigma \cdot \partial_\theta^2(e) = -4\alpha^2\sigma\theta^2$, $\partial_\sigma \cdot \partial_\theta^2(u) = -8\alpha^3\sigma(\theta(\theta u))$ et $\partial_\sigma \cdot \partial_\theta^2(v) = 8\alpha^3\sigma(\theta(\theta v))$, donc $\partial_\sigma \cdot \partial_\theta^2 = 0$ (car $UV \subset U$ et $U^3 = \{0\}$) et, a fortiori, $\partial_\sigma^2 \cdot \partial_\theta^2 = 0$. Enfin, pour tout $\tau \in U$, on a $\text{Im}(\partial_\tau) \subset U \oplus U^2$ et comme $\partial_\tau^2(e) = 2\alpha\tau^2$, $\partial_\tau^2(u) = 0$ et $\partial_\tau^2(v) = -4\alpha^2\tau(\tau v)$, il en résulte $\text{Im}(\partial_\tau^2) \subset U^2$; donc les produits $\partial_\sigma^h(x)\partial_\theta^k(y)$ sont dans $U^3 + (U^2)^2 = \{0\}$.

5.2. Définition. On appelle transformation de Peirce associée à $\sigma \in U$, l'application linéaire définie par $T_\sigma = \exp(\partial_\sigma)$.

5.3. Remarque. Comme $\partial_\sigma^3 = 0$ (proposition 5.1), $T_\sigma = \text{Id} + \partial_\sigma + \frac{1}{2}\partial_\sigma^2$. On pose: $P = \{T_\sigma / \sigma \in U\}$. Il s'ensuit que l'application $U \rightarrow P, \sigma \rightarrow T_\sigma$, est bijective.

5.4. Théorème. P est un sous-groupe commutatif de $\text{Aut}(A)$.

Démonstration. Montrons d'abord que (P, \cdot) est un groupe: en effet, par la proposition 5.1, dans le produit $(\text{Id} + \partial_\sigma + \frac{1}{2}\partial_\sigma^2) \cdot (\text{Id} + \partial_\theta + \frac{1}{2}\partial_\theta^2)$ les termes de degré

3 s'annulent, d'où $T_\sigma \circ T_\theta = \text{Id} + \partial_\sigma + \partial_\theta + \frac{1}{2}(\partial_\sigma + \partial_\theta)^2$; mais $\partial_\sigma + \partial_\theta = \partial_{\sigma+\theta}$, donc, on a: $T_\sigma \circ T_\theta = T_{\sigma+\theta}$. Ceci veut dire que $(U, +) \rightarrow (P, \circ)$, $\sigma \rightarrow T_\sigma$, est un isomorphisme de groupes. Il reste à montrer que T_σ est multiplicative: en utilisant la proposition 5.1, dans le produit $T_\sigma(x)T_\sigma(y)$, les termes de degré 3 s'annulent; on a: $T_\sigma(x)T_\sigma(y) = xy + \partial_\sigma(x)y + \frac{1}{2}\partial_\sigma^2(x)y + x\partial_\sigma(y) + \partial_\sigma(x)\partial_\sigma(y) + \frac{1}{2}\partial_\sigma^2(x)y$. Or, $\partial_\sigma(xy) = \partial_\sigma(x)y + x\partial_\sigma(y)$ et $\partial_\sigma^2(xy) = \partial_\sigma^2(x)y + 2\partial_\sigma(x)\partial_\sigma(y) + \partial_\sigma^2(x)y$, d'où $T_\sigma(x)T_\sigma(y) = xy + \partial_\sigma(xy) + \frac{1}{2}\partial_\sigma^2(xy) = T_\sigma(xy)$, ce qui achève la démonstration.

6. COMPLEMENTS DE STRUCTURE

L'introduction des transformations de Peirce donne des nouvelles lumières sur le comportement multiplicatif de l'algèbre. Les résultats qui suivent sont fort utiles pour simplifier l'écriture algébrique et établir, au paragraphe 8, des équations caractéristiques liées à des pondérations. On a:

6.1. Proposition. $U^2V = U(UV) = \{0\}$.

Démonstration. On sait par le corollaire 4.4 que $U^2V = U(UV)$. Montrons que $U(UV) = \{0\}$: soient $\sigma, \theta \in U$ et $v \in V$; on rappelle que $UV \subset U$, $U^2 \subset V$ et $U^3 = \{0\}$, donc $\sigma(\theta(\theta v)) = \sigma(\sigma(\theta(\theta v))) = 0$. On a $(T_\sigma \circ T_\theta)(v) = T_{\sigma+\theta}(v)$; or, $(T_\sigma \circ T_\theta)(v) = T_\sigma(v - 2\alpha\theta v - 2\alpha^2\theta(\theta v)) = v - 2\alpha\sigma v - 2\alpha^2\sigma(\sigma v) - 2\alpha(\theta v + 2\alpha\sigma(\theta v)) - 2\alpha^2\theta(\theta v) = v - 2\alpha(\sigma+\theta)v - 2\alpha^2(\sigma+\theta)((\sigma+\theta)v) - \alpha^2\sigma(\theta v) = T_{\sigma+\theta}(v) - 2\alpha^2\sigma(\theta v)$. On obtient $\sigma(\theta v) = 0$ (car $\alpha \neq 0$) d'où l'énoncé.

6.2. Proposition.

- a) $V^2 \subset \text{Ann}_U(U) \oplus V$, où $\text{Ann}_U(U) = \{u \in U / uU = \{0\}\}$.
 b) $(UV)^2 = U^2V^2 = \{0\}$.

Démonstration. Supposons $U^2 \neq \{0\}$: on pose $v^2 = \mu e + u' + v'$, avec $\mu \in K$; comme $UV \subset U$, $\partial_\sigma(v)v \in U$, $\sigma \in U$. Or, $2\partial_\sigma(v)v = \partial_\sigma(v^2) = \mu\sigma + 2\alpha\sigma u' - 2\alpha\sigma v'$, d'où: $\sigma u' = 0$ (car $U^2 \subset V$) donc $u' \in \text{Ann}_U(U)$. Il en résulte que $2\partial_\sigma(v)v = \partial_\sigma(v^2) = \mu\sigma - 2\alpha\sigma v'$, d'où $\mu\sigma^2 = 0$ car $\sigma(\sigma v') = 0$; comme σ est arbitraire et $U^2 \neq \{0\}$ il s'ensuit que $\mu = 0$; ainsi $v^2 = u' + v' \in \text{Ann}_U(U) \oplus V$. Maintenant, si $U^2 = \{0\}$, soit A' l'extension de A définie par $A' = K e \oplus U' \oplus V'$ avec $U' = Kx \oplus U$, $V' = Ky \oplus V$ et produits: (*) $e x = \frac{1}{2}x$, $e y = \gamma y$, $x^2 = y$, $xy = y^2 = 0$ et $xU = xV = yU = yV = \{0\}$. Il est clair que A' vérifie les mêmes propriétés structurales que A par rapport aux dérivations de Peirce (les conditions 3.2, etc.); or, $U'^2 = Ky \neq \{0\}$, donc $V'^2 \subset \text{Ann}_{U'}(U') \oplus V'$. Mais de (*) on a: $\text{Ann}_{U'}(U') = \text{Ann}_U(U)$, $V'^2 = V^2$ et $(Kx \oplus Ky) \cap V^2 = \{0\}$, d'où $V^2 \subset \text{Ann}_U(U) \oplus V$. Quant aux identités nulles de (b), le résultat sort des égalités $U(UV) = U^2V = U^3 = \{0\}$ et du corollaire 4.2: en effet, $UV \subset U$ donc $(UV)^2 \subset U(UV)$; de la même façon, par (a) nous avons $V^2 \subset \text{Ann}_U(U) \oplus V$, d'où $U^2V^2 \subset U^2(\text{Ann}_U(U) \oplus V) = U^2\text{Ann}_U(U) \oplus U^2V = \{0\}$.

6.3. Théorème. A est pondérée par $\omega: A \rightarrow K$, $\omega(\lambda e + u + v) = \lambda$.

Démonstration. Ceci est équivalent à dire que $U \oplus V$ est un idéal de A , résultat qui découle du corollaire 4.2 et de la proposition 6.2.(a).

6.4. Proposition. $A_e = Ke \oplus U \oplus U^2$ est une train algèbre de rang 3, d'équation $x^3 = (1 + \gamma)\omega(x)x^2 - \gamma\omega(x)^2x$.

Démonstration. Pour les train algèbres de rang 3, voir [4] et [6]. Le résultat demandé découle des identités données par les corollaires 4.2 et 4.4.

6.5. Proposition. $A^2 = A_e$ si et seulement si A est une algèbre de Bernstein.

Démonstration. Pour les algèbres de Bernstein, celles pondérées déterminées par $(x^2)^2 = \omega(x)^2x^2$, voir [5], [6] et [8]. Si $A^2 = A_e$, forcément $\gamma = 0$ et $V^2 \subset U$; le reste vient sans difficulté.

7. IDEMPOTENTS ET DECOMPOSITIONS

Les transformations de Peirce donnent, à peu près, la mesure de l'ensemble des idempotents non nuls de l'algèbre. En effet, de 5.3 et 6.1, on déduit que T_σ est donnée par: $e \rightarrow e + \sigma + \alpha\sigma^2$, $u \rightarrow u + 2\alpha\sigma u$ et $v \rightarrow v - 2\alpha\sigma v$. Ceci entraîne que l'application $U \rightarrow \text{Ip}(A)$, $\sigma \rightarrow T_\sigma(e)$, est injective; cependant, elle n'est pas forcément surjective.

Pour simplifier l'écriture, on dénote: $T_\sigma(x) = x_\sigma$ et $X_\sigma = \{x_\sigma / x \in X\}$. Ainsi, $e_\sigma = e + \sigma + \alpha\sigma^2$, $u_\sigma = u + 2\alpha\sigma u$ et $v_\sigma = v - 2\alpha\sigma v$. On a:

7.1. Proposition.

- $\{e_\sigma / \sigma \in U\} = \text{Ip}(A_\sigma)$.
- $2e_\sigma u_\sigma = u_\sigma$, $e_\sigma v_\sigma = \gamma v_\sigma$ et $A = Ke_\sigma \oplus U_\sigma \oplus V_\sigma$.
- $U_\sigma^2 \subset V_\sigma$, $U_\sigma V_\sigma \subset U_\sigma$, $V_\sigma^2 \subset \text{Ann}_{U_\sigma}(U_\sigma \oplus V_\sigma)$.
- $U_\sigma^3 = (U_\sigma^2)^2 = U_\sigma^2 V_\sigma = U_\sigma(U_\sigma V_\sigma) = (U_\sigma V_\sigma)^2 = U_\sigma^2 V_\sigma^2 = \{0\}$.

Démonstration. Pour (a), voir proposition 6.4 et références y utilisées. Les autres affirmations découlent du fait que T_σ est un automorphisme d'algèbre et des relations obtenues sur les espaces U et V .

7.2. Remarque. Soit $B = A_e \oplus Kw$, avec $ew = \gamma w$, $wU = wU^2 = \{0\}$ et $w^2 = w$. Cette extension garde les propriétés structurelles des algèbres traitées dans ce travail. Il est clair que $\text{Ip}(B_\sigma) = \text{Ip}(A_\sigma)$, mais $\text{Ip}(B_\sigma)$ est strictement contenu dans $\text{Ip}(B)$, w étant un idempotent de poids nul.

Concernant les idempotents de poids 1, on a:

7.3. Proposition. Soit $\varepsilon \in \text{Ip}(A)$ tel que $\omega(\varepsilon) = 1$. Alors, il existe $\sigma \in U$ et $v \in V$ tels que $\varepsilon = e_\sigma + v$.

Démonstration. Soit $\varepsilon \in \text{Ip}(A)$ tel que $\omega(\varepsilon) = 1$; on pose $\varepsilon = e + \sigma + w$ avec $\sigma \in U$ et $w \in V$. On a $\varepsilon^2 = e + \sigma + \sigma^2 + 2\sigma w + 2\gamma w + w^2$. Comme $w^2 \in \text{Ann}_U(U) \oplus V$ (prop. 6.2.a), soit $w^2 = u + v'$. De $\varepsilon^2 = \varepsilon$ on obtient $w = \sigma^2 + 2\gamma w + v'$, d'où $w = \alpha\sigma^2 + \alpha v'$. Ainsi, $\varepsilon = e_\sigma + v$ avec $v = \alpha v'$.

7.4. Remarque. L'égalité $\text{Ip}(A) = \text{Ip}(A_\theta)$ veut dire que le choix d'un idempotent ne joue aucun rôle: sous n'importe quelle décomposition on obtient les mêmes propriétés structurelles. Autrement dit, toute décomposition de Peirce est canonique.

On pose: $F = \{f \in \text{Aut}(A) / f(e) = e\}$.

F est un groupe algébrique et son algèbre de Lie associée est Δ (voir [2]).

7.5. Proposition. Si $\text{Ip}(A) = \text{Ip}(A_\theta)$, alors P est un sous-groupe invariant et $\text{Aut}(A) \cong P \times F$, produit semi-direct. De plus, $F \cong \text{Aut}(A)/P$.

Démonstration. Si $\varphi \in \text{Aut}(A)$ alors $\varphi(e) \in \text{Ip}(A)$; il existe, donc, $\sigma \in U$ tel que $\varphi(e) = e_\sigma$, ceci veut dire que $T_\sigma^{-1} \circ \varphi \in F$, autrement dit, $\varphi = T_\sigma \circ f$ pour un $f \in F$ (1). Par ailleurs, si $f \in F$ et $T_\sigma \in P$, un calcul rapide sur les éléments type e , u et v montre que $f \circ T_\sigma \circ f^{-1} = T_{f(\sigma)}$ (2). Comme $T_\sigma \circ T_\theta = T_{\sigma+\theta}$, de (1) et (2) on déduit que P est un sous-groupe invariant de $\text{Aut}(A)$. Enfin, l'application $(T_\sigma, f) \rightarrow T_\sigma \circ f$, de $P \times F$ dans $\text{Aut}(A)$, établit l'isomorphisme demandé, le produit dans $P \times F$ étant donné par: $(T_\sigma, f)(T_\theta, g) = (T_{\sigma+f(\theta)}, f \circ g)$. La dernière affirmation en découle.

8. ETUDE D'UN CAS: DES EQUATIONS

Dorénavant on suppose que $V^2 \subset U$. Dans ces conditions:

8.1. Proposition.

a) $\text{Ip}(A) = \text{Ip}(A_\theta)$.

b) $UV^2 = UV^2 = (V^2)^2 = v(Uv) = \{0\}$, pour tout $v \in V$.

Démonstration. L'affirmation (a) découle de la preuve de la proposition 7.3. Quant à (b), comme $V^2 \subset U$, on a $\partial_\sigma(v^2) = 2\alpha\sigma v^2$ pour tout $\sigma \in U$. Mais $\partial_\sigma(v^2) = 2v\partial_\sigma(v)$ d'où $\sigma v^2 = -2v(\sigma v)$. Or, $\sigma v^2 \in V$ et $v(\sigma v) \in U$ (corollaire 4.2), donc σv^2

$= v(\sigma v) = 0$. Il s'ensuit que $v(Uv) = \{0\}$; puis, en faisant $\sigma(v+v')^2 = 0$, vient $UV^2 = \{0\}$. Enfin, $UV^3 = U(V^2V) \subset U(UV)$ et $(V^2)^2 = V^2V^2 \subset UV^2$.

Les deux résultats qui suivent sont justifiés par les relations $U^2 \subset V$, $UV \subset U$, $V^2 \subset U$ et les identités $U^4 = (U^2)^2 = U^3 = U(UV) = U^2V = (UV)^2 = U^2V^2 = UV^2 = UV^3 = (V^2)^2 = v(Uv) = \{0\}$, pour tout $v \in V$.

8.2. Proposition. $(\text{Ker}(\omega)^2)^2 = \{0\}$. De plus, si $z \in \text{Ker}(\omega)$, alors $z^4 = 0$.

Démonstration. On rappelle que $\text{Ker}(\omega) = U \oplus V$.

8.3. Proposition. Si $y = e + u + v$, alors:

$$y^2 = e + u + 2uv + v^2 + 2\gamma v + u^2;$$

$$y^3 = e + u + 2(1+\gamma)uv + \frac{1}{2}(1+4\gamma)v^2 + v^3 + \gamma(1+2\gamma)v + (1+\gamma)u^2;$$

$$y^4 = e + u + 2(1+\gamma+\gamma^2)uv + \frac{1}{4}(1+8\gamma+8\gamma^2)v^2 + (1+2\gamma)v^3 + \gamma(1+\gamma+2\gamma^2)v + (1+\gamma+\gamma^2)u^2;$$

$$(y^2)^2 = e + u + 2(1+2\gamma)uv + (1+4\gamma^2)v^2 + 4\gamma v^3 + 4\gamma^2v + (1+2\gamma)u^2.$$

8.4. Proposition. Si $y = e + u + v$, alors: $(y^2)^2 = 4\gamma y^3 + (1-2\gamma-4\gamma^2)y^2 + 2\gamma(2\gamma-1)y$.

Démonstration. Il suffit de tester l'égalité en utilisant 8.3.

8.5. Théorème. On a: $(x^2)^2 = 4\gamma\omega(x)x^3 + (1-2\gamma-4\gamma^2)\omega(x)^2x^2 + 2\gamma(2\gamma-1)\omega(x)^3x$ pour tout $x \in A$.

Démonstration. Le résultat est vérifié si $\omega(z) = 0$, car par la proposition 8.2 on a: $(z^2)^2 = 0$. De même, la proposition 8.4 nous dit que l'identité est vraie pour les $y \in A$, $\omega(y) = 1$; or, en posant $y = \omega(x)^{-1}x$, puis en multipliant par $\omega(x)^4$, on déduit qu'elle est aussi vérifiée pour les $x \in A$, $\omega(x) \neq 0$.

8.6. Proposition. En général, A n'est pas une train algèbre de rang 4.

Démonstration. En effet, si tel était le cas, il y aurait des scalaires b, c et d tels que pour tout $y \in A$, $\omega(y) = 1$, on ait: $y^4 = by^3 + cy^2 + dy$. Or, si on regarde le terme générique v^3 exhibé dans les égalités de 8.3, forcément $b = 1+2\gamma$. De ce fait, selon les termes u^2 et v^2 , il en résulte $(1+\gamma+\gamma^2) = c + (1+2\gamma)(1+\gamma)$ et $\frac{1}{4}(1+8\gamma+8\gamma^2) = c + \frac{1}{2}(1+4\gamma)(1+2\gamma)$, respectivement. Il s'ensuit que $4(1+\gamma+\gamma^2) - 4(1+2\gamma)(1+\gamma) = (1+8\gamma+8\gamma^2) - 2(1+4\gamma)(1+2\gamma)$, d'où $1-2\gamma = 0$, ce qui est impossible.

8.7. Remarque. Si $v^3 = 0$ pour tout $v \in V$, mais qu'il existe $u \in U$ et $v \in V$ tels que u^2 et $v^2 \neq 0$ (ou, de même, uv et $v^2 \neq 0$), on peut montrer que A vérifie la train équation $x^4 = \frac{1}{2}(3+2\gamma)\omega(x)x^3 - \frac{1}{2}(1+3\gamma)\omega(x)^2x^2 + \frac{1}{2}\gamma\omega(x)^3x$. Enfin, Si $V^2 = \{0\}$, A est une algèbre train de rang 3, d'équation $x^3 = (1+\gamma)\omega(x)x^2 - \gamma\omega(x)^2x$.

BIBLIOGRAPHIE

1. Alcalde, C. Burgueño et C. Mallol, Dérivations dans les algèbres de Bernstein, *J. Algebra* **183**, 826-836 (1996).
2. Burgueño et C. Mallol, Morphismes de Peirce et orthogonalité dans les algèbres de Bernstein, *Linear Algebra Appl.* **219**, (1995), 179-186.
3. Benavides and C. Mallol, *Pierce transformation, automorphisms and derivations in train algebras of rank 3*, *Algebras, Groups and Geom.*, **13** (1996), 401-412.
4. Costa, Principal train algebras of rank 3 and dimension < 5 , *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **33** (1990), 61-70.
5. Ju. I. Lyubich, "Mathematical Structures in Population Genetics", Springer-Verlag, Berlin/New York, 1993.
6. Holgate P, Genetic algebras satisfying Bernstein stationarity principle, *J. London Math. Soc.* (2) **9** (1975), 613-623.
7. Mallol et R. Varro, Dérivations dans les algèbres d'Etherington, *Nova Journal of Mathematics, Game Theory and Algebra*, Vol. 4 N° 2, (1996), 129-146. (*)
8. Worz, "Algebras in Genetics", *Lecture Notes in Biomathematics*, Vol. 36, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1990.

(*) Par erreur, cet article est apparu sous le titre de "Dérivations dans les algèbres de Walcher". L'éditeur s'est engagé à publier un erratum.

Received: September 1997