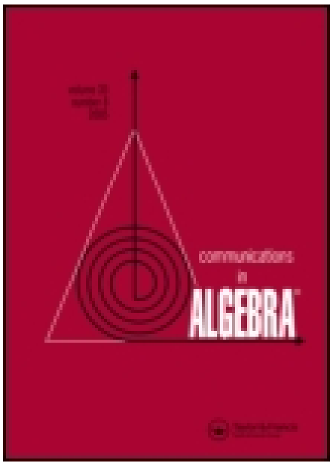

Communications in Algebra
Publication details, including instructions for authors and subscription information:
http://www.tandfonline.com/loi/lagb20

Une classe d'algèbres pondérées de degré 4

Cristián Mallol [a] & Avelino Suazo [b]

[a] Departamento de Matemática , Casilla, Temuco, Chile E-mail:

[b] Departamento de matemática , Uniiversidad de laserena , Benavente 980, La Serena, Chile E-mail:

Published online: 27 Jun 2007.

To cite this article: Cristián Mallol & Avelino Suazo (2000) Une classe d'algèbres pondérées de degré 4 , Communications in Algebra, 28:4, 2191-2199, DOI: 10.1080/00927870008826952

To link to this article: http://dx.doi.org/10.1080/00927870008826952

COMMUNICATIONS IN ALGEBRA, 28(4), 2191-2199 (2000)

UNE CLASSE D'ALGÈBRES PONDÉRÉES DE DEGRÉ 4 *

Cristián Mallol
Departamento de Matemática
Universidad de La Frontera
Casilla 54-D, Temuco, Chile
cmallol@ufro.cl

Avelino Suazo
Departamento de Matemática
Universidad de La Serena
Benavente 980, La Serena, Chile
asuazo@recova.mat.userena.cl

Dans ce travail nous analysons la structure des algèbres vérifiant $(x^2)^2 = \alpha\omega(x)x^3 + \beta\omega(x)^2x^2 + \gamma\omega(x)^3x$. Celles-ci généralisent les algèbres de Bernstein et d'Etherington, parmi d'autres algèbres pondérées classiquement étudiées.

1. Introduction.

Dans ce qui suit K est un corps et A une K-algèbre commutative non nécessairement associative. Si $x \in A$ on définit les puissances principales (respectivement, pleines) de x par $x^1 = x$ et $x^{n+1} = xx^n$ (respectivement, $x^{[1]} = x$ et $x^{[n+1]} = (x^{[n]})^2$). Si X et Y sont deux sous-espaces de A, XY designe le sous-espace engendré par les produits xy, $x \in X$ et $y \in Y$; récursivement on définit les sous-espaces X^n.

On dit que A est une algèbre pondérée, qu'on dénote (A, ω), s'il existe un morphisme non nul d'algèbres (appelé pondération) $\omega : A \to K$ (c.f.[4]). Si l'algèbre admet un idempotent $e \in A$ ($e \neq 0$ et $e^2 = e$) et $\omega(e) = 1$, la décomposition de Peirce de A par rapport à l'idempotent est donnée par $A = Ke \oplus Ker(\omega)$, $Ker(\omega)$ étant un idéal de A.

Une algèbre pondérée (A, ω) est train de rang n si pour tout $x \in A$ elle vérifie l'identité $x^n + \gamma_1\omega(x)x^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-1}\omega(x)^{n-1}x = 0$, où les $\gamma_i \in K$, l'entier n étant minimal. La structure des algèbres pondérées en général, des algèbres génétiques, des algèbres train, des algèbres de Bernstein et autres, sont étudiées par A. Worz-Buzekros dans son texte "Algebras in Genetics" (c.f.[13]).

Enfin, nous dirons qu'une algèbre pondérée est de degré (ou ordre, ou rang) 4 si elle satisfait une expression du type $\alpha(x^2)^2 + \beta x^4 + \gamma\omega(x)x^3 + \delta\omega(x)^2x^2 + \varepsilon\omega(x)^3x = 0$. Le degré de l'identité est minimal, c'est-à-dire, on impose qu'elles ne satisfont pas d'identité d'ordre plus petit, plus précisement, elles ne satisfont pas une train équation de rang ≤ 3 (c.f.[3]). Dans ce travail, nous étudions la structure d'une classe de ces algèbres.

* Avec l'appui de Conicyt-Chile, projet Fondecyt-Líneas Complementarias N° 8990001.

2. Préliminaires

Soit A une algèbre commutative pondérée vérifiant $(x^2)^2 = \alpha\omega(x)x^3 + \beta\omega(x)^2x^2 + \gamma\omega(x)^3x$ n'admettant pas une identité de degré plus petit. Il est immédiat que $\alpha + \beta + \gamma = 1$ (il suffit d'appliquer ω sur l'identité avec $\omega(x) = 1$); de plus, si $x \in \mathrm{Ker}(\omega)$ alors $(x^2)^2 = 0$; puis, si $e \in \mathrm{Ip}(A)$ (un élément idempotent) alors $\omega(e) = 1$ (ceci vient de l'identité et du fait que $e \neq 0$). Enfin, la pondération ω est unique (c.f.[11]). Si la caractéristique du corps est 2, alors l'algèbre est quasi-constante : concernant la structure de ce type d'algèbre on se remet à [8]. Dorénavant, $\mathrm{car}(K) \neq 2$.

2.1. **Remarque**. De façon plus générale, nous avons à faire avec des algèbres pondérées et des identités $E_n(x)$ du type $M_n(x) = \alpha_{n-1}\omega(x)^2M_{n-1}(x) + \ldots + \alpha_1\omega(x)^nM_1(x)$, où $M_k(x)$ est un monôme non associatif de degré k (un parenthèsage avec k lettres x). Or, si pour tout $y \in A$, $\omega(y) = 1$, $E_n(y)$ est vraie alors $E_n(x)$ est vérifiée sur A: en effet, l'identité est satisfaite par tous les éléments de poid non nul car $E_n(x) = \omega(x)^nE_n(\omega(x)^{-1}x)$; le résultat s'étend à toute l'algèbre par la topologie de Zariski (ou, d'une autre façon, en polarisant $E_n(y+z)$, avec $y, z \in A$, $\omega(y) = 1$ et $\omega(z) = 0$). ▪

A la famille des algèbres verifiant $(x^2)^2 = \alpha\omega(x)x^3 + \beta\omega(x)^2x^2 + \gamma\omega(x)^3x$ appartiennent quelques unes étudiées depuis un certain temps, telles les algèbres de Bernstein, définies par $(x^2)^2 = \omega(x)^2x^2$, les algèbres d'Etherington, définies par $(x^2)^2 = \omega(x)^3x$; etc. (c.f. [1], [6] et [7]). D'ailleurs, ces algèbres sont les seules de cette famille qui vérifient une identité de puissances pleines (c'est-à-dire, quand $\alpha = 0$); ceci découle de la minimalité du degré et du résultat connu suivant (voir [12]):

2.2. **Proposition**. Si A vérifie l'identité $x^3 = (1 + \gamma)\omega(x)x^2 - \gamma\omega(x)^2x$ alors elle vérifie aussi l'identité $(x^2)^2 = (1 + 2\gamma)\omega(x)^2x^2 - 2\gamma\omega(x)^3x$. Si $2\gamma \neq 0, -1$, la réciproque est vraie. ▪

2.3. **Remarque**. Par des techniques de linéarisation et de polarisation de l'identité $(x^2)^2 = \alpha\omega(x)x^3 + \beta\omega(x)^2x^2 + \gamma\omega(x)^3x$, on obtient les relations suivantes, qu'on utilisera par la suite. Pour tout $x \in A$ et $z, z' \in \mathrm{Ker}(\omega)$:

$r_1(x,z)$: $\quad 4z^2(zx) = \alpha\omega(x)z^3$

$r_2(x,z)$: $\quad 4x^2(xz) = 2\alpha\omega(x)x(xz) + \alpha\omega(x)zx^2 + 2\beta\omega(x)^2xz + \gamma\omega(x)^3z$

$r_3(x,z,z')$: $\quad 8(xz)(zz') + 4(xz')z^2 = \alpha\omega(x)z'z^2 + 2\alpha\omega(x)(zz')z$

$r_4(x,z,z')$: $\quad 4(xz)(xz') + 2(zz')x^2 = \alpha\omega(x)(xz')z + \alpha\omega(x)(xz)z' + \alpha\omega(x)x(zz') + \beta\omega(x)^2zz'$ ▪

3. Paramétrisation et classification

Nous énonçons le théorème de classification, dont la démonstration occupera tout ce paragraphe. Nous avons :

3.1. **Théorème**. A satisfait au moins une des identités suivantes:

a) $(x^2)^2 = 4\lambda\omega(x)x^3 + (1 - 2\lambda - 4\lambda^2)\omega(x)^2x^2 + (4\lambda^2 - 2\lambda)\omega(x)^3x$.

b) $(x^2)^2 = (2\lambda + 1)\omega(x)x^3 - (\lambda + 2\lambda^2)\omega(x)^2x^2 + (2\lambda^2 - \lambda)\omega(x)^3x$.

Si $2\lambda = 1$ les identités ci-dessus coincident sur la relation $(x^2)^2 = 2\omega(x)x^3 - \omega(x)^2x^2$. On précise l'énoncé du théorème avec:

3.2. **Proposition**. Si $2\lambda \neq 1$, l'algèbre vérifie une et seulement une des identités signalées dans le théorème 3.1.

Démonstration. Si l'on suppose le contraire, de l'égalité de deux identités on obtient $\omega(x)(x^3 - (1+\lambda)\omega(x)x^2 + \lambda\omega(x)^2x) = 0$ (car $2\lambda - 1 \neq 0$) d'où $x^3 = (1 + \lambda)\omega(x)x^2 - \lambda\omega(x)^2x$ est vraie pour tous les éléments de poids non nul donc, par la remarque 2.1. l'identité est vérifiée pour tout $x \in A$. Ceci contredit la minimalité du degré de l'identité. ▪

3.3. **Remarque**. Quand $2\lambda \neq 1$ il y a une équivalence entre la coincidence des identités du théorème 3.1. et la vérification par l'algèbre de l'identité $x^3 = (1 + \lambda)\omega(x)x^2 - \lambda\omega(x)^2x$ (on s'en remet à [12]). ▪

La démonstration du théorème 3.1 découle des résultats qui suivent, concernant les scalaires α et γ. Cependant, d'abord nous avons besoin de:

3.4. **Lemme.** Soit $y \in A$, $\omega(y) = 1$; si $z = y^2 - y$ on a :

a) $(\alpha - 2)yz = \gamma z + z^2$;

b) $(\alpha^2 - 3\alpha - 4\gamma + 2)z^2 - 4z^3 + 2(\alpha - 2)yz^2 = 0$;

c) $(\alpha^2 - 2\alpha - 4\gamma)z^3 = 0$; si $(\alpha - 2)z^3 = 0$, $(\alpha^2 - 2\alpha - 4\gamma)(\alpha^2 - 3\alpha - 2\gamma + 2)z^2 = 0$.

Démonstration. On a : $0 = (y^2)^2 - \alpha y^3 - \beta y^2 - \gamma y$. De $y^2 = y + z$, on a $y^3 = y + z + yz$ et $(y^2)^2 = y + z + 2yz + z^2$ donc, $0 = y + z + 2yz + z^2 - \alpha(y + z + yz) - \beta(y + z) - \gamma y = \gamma z + (2 - \alpha)yz + z^2$, ce qui établit (a). De même, en faisant $r_2(y,z)$ (remarque 2.3) il en résulte: $4y^2(yz) = 2\alpha y(yz) + \alpha zy^2 + 2\beta zy + \gamma z$; or de $y^2 = y + z$ on a $y^2(yz) = y(yz) + z(yz)$ et $zy^2 = yz + z^2$ donc $4y(yz) + 4z(yz) = 2\alpha y(yz) + \alpha yz + \alpha z^2 + 2(1 - \alpha - \gamma)yz + \gamma z$; en multipliant ceci par $\alpha-2$ et en utilisant (a), on obtient (b). L'affirmation (c) sort de (a) et de $r_1(y,z)$. Finalement, pour ce qui est de (d), si $\alpha = 2$ et $\gamma = 0$ la relation se trivialise ; de même, si $\alpha = 2$ et $\gamma \neq 0$, l'identité (a) devient $z^2 + \gamma z = 0$ d'où $(z^2)^2 = \gamma^2z^2$; mais $z \in \mathrm{Ker}(\omega)$ donc $(z^2)^2 = 0$, ce qui montre l'identité (d) dans ce cas particulier. On peut donc considérer $\alpha \neq 2$: de $y^2 = y + z$ on obtient : (1) $y^2z^2 = yz^2$; puis, de la relation (a) on déduit: (2) $(\alpha-2)^2(yz)^2 = \gamma^2z^2$ et $(\alpha-2)(yz)z = \gamma z^2$. Or, de $r_4(y,z,z)$ (remarque 2.3) on a $4(yz)^2 + 2y^2z^2 = 2\alpha(yz)z + \alpha yz^2 + \beta z^2$ d'où $(\alpha - 2)yz^2 = 4(yz)^2 - 2\alpha(yz)z - \beta z^2$ puis, des sustitutions (1) et (2) on obtient $(\alpha - 2)^3yz^2 = [4\gamma^2 - 2\alpha\gamma(\alpha - 2) + (1 - \alpha - \gamma)(\alpha - 2)^2]z^2$; l'énoncé découle du remplacement de yz^2 dans la relation (b). ▪

3.5. **Proposition**. On a forcément $2\gamma = \alpha - 2 = 0$ ou $2\gamma \neq \alpha - 2 \neq 0$.

Démonstration. Montrons qu'on ne peut pas avoir $2\gamma = \alpha - 2 \neq 0$ ni $2\gamma \neq \alpha - 2 = 0$. Nous verrons que dans chaqun de ces cas A satisfait une train-équation d'ordre ≤ 3. Soient $y, z \in A$, tels que $\omega(y) = 1$ et $z = y^2 - y$. Nous avons :

- Si $\alpha - 2 = 2\gamma \neq 0$, les relations 3.4.(a) et (c) deviennent respectivement $2\gamma yz = \gamma z + z^2$ et $4\gamma^2z^3 = 0$; comme $\gamma \neq 0$, la relation 3.4.(d) donne $z^2 = 0$ d'où $2yz = z$, c'est-à-dire $2y^3 = 3y^2 - y$; donc l'identité $2x^3 = 3\omega(x)x^2 - \omega(x)^2x$ est vérifiée pour tout $x \in A$ (remarque 2.1).

- De même, si $2\gamma \neq \alpha - 2 = 0$ de 3.4.(a), on a $z^2 + \gamma z = 0$ d'où $z^2 = -\gamma z$; or $(z^2)^2 = 0$ (car $z \in \mathrm{Ker}(\omega)$), d'où $0 = (z^2)^2 = \gamma^2 z^2 = -\gamma^3 z$, donc $z = 0$ (car $\gamma \neq 0$), c'est-à-dire $y^2 = y$. Par les mêmes arguments devéloppés ci-dessus, l'identité $x^2 = \omega(x)x$ est vérifiée par tous les éléments de A. •

3.6. **Remarque**. Si $2\gamma = \alpha - 2 = 0$, A satisfait $(x^2)^2 = 2\omega(x)x^3 - \omega(x)^2x^2$. Cette identité, vérifiée parmi d'autres par les algèbres de mutation, réprésente une tentative de modeliser le rétrocroisement en génétique des populations (sous la forme $x^3 = \frac{1}{2}((x^2)^2+x^2)$; c.f.[9]). Ces algèbres n'ont pas forcément un idempotent, comme le montre l'exemple suivant: soit A l'algèbre ayant une base $\{u,v\}$ et produits $u^2 = u + v$, $2uv = v$, $v^2 = 0$. On prouve sans difficulté que la forme linéaire ω: $A \to K$ définie par $\omega(u) = 1$ et $\omega(v) = 0$ est une pondération; puis, des simples calculs montrent que $(x^2)^2 = 2\omega(x)x^3 - \omega(x)^2x^2$ est vérifiée sur A et que l'algèbre n'a pas d'idempotents. •

Pour finir, analysons la situation $2\gamma \neq \alpha - 2 \neq 0$. Pour cela, considérons les coefficients facteurs de z^2 dans 3.4.(d) : $\alpha^2 - 2\alpha - 4\gamma$ et $\alpha^2 - 3\alpha - 2\gamma + 2$:

3.7. **Proposition**. Sous les conditions $2\gamma \neq \alpha - 2 \neq 0$, on a:

a) $\alpha^2 - 2\alpha - 4\gamma \neq \alpha^2 - 3\alpha - 2\gamma + 2$.

b) $(\alpha^2 - 2\alpha - 4\gamma)(\alpha^2 - 3\alpha - 2\gamma + 2) = 0$.

Démonstration La première affirmation est immédiate, car $2\gamma - \alpha + 2 \neq 0$. Maintenant, supposons que $(\alpha^2 - 2\alpha - 4\gamma)(\alpha^2 - 3\alpha - 2\gamma + 2) \neq 0$: alors 3.4.(c) devient $z^3 = 0$ donc, par 3.4.(d), $z^2 = 0$. De ce fait 3.4.(a) devient $(\alpha-2)yz = \gamma z$. Ceci entraîne (remarque 2.1) que l'identité $(\alpha - 2)x^3 = (\alpha - 2 + \gamma)\omega(x)x^2 - \gamma\omega(x)^2x$ est vraie sur A. •

Maintenant nous sommes en mesure, d'établir l'énoncé du théorème de classification: en effet, soit $\lambda \in K$ tel que $(\alpha - 2)\lambda = \gamma$ (forcément $2\lambda \neq 1$); on a:

- Si $\alpha^2 - 2\alpha - 4\gamma = 0$ alors $\alpha(\alpha - 2) = 4\gamma$ d'où $\alpha = 4\lambda$. Ceci veut dire que nous avons l'identité $(x^2)^2 = 4\lambda\omega(x)x^3 + (1 - 2\lambda - 4\lambda^2)\omega(x)^2x^2 + (4\lambda^2 - 2\lambda)\omega(x)^3x$.

- Si $\alpha^2 - 3\alpha - 2\gamma + 2 = 0$ alors $\alpha(\alpha - 2) - (\alpha - 2) = 2\gamma$ d'où $\alpha = 1 + 2\lambda$, et on obtient l'identité $(x^2)^2 = (2\lambda + 1)\omega(x)x^3 - (\lambda + 2\lambda^2)\omega(x)^2x^2 + (2\lambda^2 - \lambda)\omega(x)^3x$.

3.8. **Théorème**. Si A est à puissances associatives alors elle vérifie une des identités suivantes : $(x^2)^2 = \omega(x)x^3$ ou $(x^2)^2 = 3\omega(x)x^3 - 3\omega(x)^2x^2 + \omega(x)^3x$.

Démonstration. Soit $x \in A$, avec $\omega(x) = 1$. Comme A est à puissanses associatives, $x^4 = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x$, d'où $x^5 = (\alpha^2 + \beta)x^3 + (\alpha\beta + \gamma)x^2 + \alpha\gamma x$. Or, de $r_2(x,x^2-x)$ on obtient: $4x^5 = (3\alpha+4)x^4 + (2\beta-3\alpha)x^3 + (\gamma-2\beta)x^2 - \gamma x = (3\alpha^2+\alpha+2\beta)x^3 + (3\alpha\beta+2\beta+\gamma)x^2 + 3(\alpha\gamma+\gamma)x$. De tout cela il vient que $(\alpha^2 - \alpha + 2\beta)x^3 + (\alpha\beta - 2\beta + 3\gamma)x^2 + (\alpha\gamma - 3\gamma)x = 0$. Or, si $\alpha = 4\lambda$ il en résulte $(2\lambda - 1)x^3 = (4\lambda^2 - \lambda - 1)x^2 + (3\lambda - 4\lambda^2)x$, ce qui contrédit la minimalité du degré (car $2\lambda \neq 1$). Par contre, si $\alpha = 1 + 2\lambda$ on obtient l'identité $\lambda(\lambda - 1)(x^2 - x) = 0$ d'où forcément $\lambda = 0$ ou 1. Les identités liées à ces valeurs de λ sont celles signalées à l'énoncé. •

4. La décomposition de Peirce

Vu la classification faite ci-dessus, dans ce qui reste de l'article nous considérons $2\lambda \neq 1$.

4.1. **Proposition**. L'algèbre admet toujours un idempotent ($Ip(A) \neq \phi$).

Démonstration. Soit $y \in A$ tel que si $\omega(y) = 1$. Si $\alpha = 4\lambda$, un simple calcul montre que $(1-2\lambda)^{-1}(y^2 - 2\lambda y)$ est un idempotent. Si, maintenant, $\alpha = 2\lambda + 1$, en utilisant les relations du lemme 3.4, un calcul (plus long) montre que $(1-2\lambda)^{-2}(y^3 - 3\lambda y^2 + (4\lambda^2 - \lambda)y)$ est un idempotent. ▪

4.2. **Proposition**. Pour tout entier n, $Ker(\omega)^n$ est un idéal de A.

Démonstration. Si $e \in Ip(A)$ on a $A = Ke \oplus Ker(\omega)$; de ce fait, comme $Ker(\omega)Ker(\omega)^n = Ker(\omega)^{n-1} \subset Ker(\omega)^n$, il suffit de démontrer que $eKer(\omega)^{n-1} \subset Ker(\omega)^{n-1}$ pour établir inductivement le résultat. Pour cela, soient $x \in Ker(\omega)$ et $z \in Ker(\omega)^n$; en faisant $r_4(e,x,z)$ (remarque 2.3) on obtient $(2-\alpha)e(xz) = \alpha(ex)z + \alpha(ez)x + \beta xz - 4(ex)(ez)$ d'où l'énoncé. ▪

4.3. **Théorème**. Soit e un idempotent de A. On a:

a) $A = Ke \oplus U \oplus V$ avec $U = \{u \in Ker(\omega) \,/\, eu = \frac{1}{2}u\}$, $V = \{v \in Ker(\omega) \,/\, ev = \lambda v\}$. De plus, les relations d'inclusion et multiplicatives suivantes sont vérifiées:

b) $U^2 \subset V$, $UV \subset U$ et $UV^2 \subset U$.

c) Selon la valeur de α (4λ ou $1 + 2\lambda$), $V^2 \subset U$ ou $V^2 \subset V$. De plus $VU^2 \subset U \oplus U^2$.

d) Pour tout x , y, z, $z' \in Ker(\omega)$: $z^2(zx) = 0$, $2(xz)^2 + x^2z^2 = 0$, $2(xz)(xz') + (zz')x^2 = 0$, $(xy)(zz') + (xz)(yz') + (xz')(yz) = 0$ et $4z^2(ez) = \alpha z^3$.

Démonstration. Dans ce qui suit, il faut avoir en tête les relations de la remarque 2.3. De $r_2(e,z)$ on obtient $2e(ez) - (1 + 2\lambda)ez + \lambda z = 0$. Il s'ensuit que $L : Ker(\omega) \to Ker(\omega)$ définie par $z \to ez$, vérifie $(2L - Id) \circ (L - \lambda Id) = 0$; elle admet donc les valeurs propres distintes $\frac{1}{2}$ et λ ceci montre (a). Quant à (b) et (c), il suffit d'employer les relations de la remarque 2.3: en effet, par exemple, pour ce qui est de (c), de $r_4(e,v,v)$: $4(ev)^2 + 2ev^2 = 2\alpha(ev)v + \alpha ev^2 + \beta v^2$ d'où $(\alpha - 2)ev^2 = (4\lambda^2 - 2\alpha\lambda + \alpha + \gamma - 1)v^2$: si $\alpha = 4\lambda$, on a $V^2 \subset U$; par contre, si $\alpha = 1+2\lambda$ alors $V^2 \subset V$. Quant à la dernière affirmation, si $V^2 \subset U$ ne pose pas de problèmes; puis, si $V^2 \subset V$ ($\alpha = 1 + 2\lambda$), de $r_3(e,u,v)$: on a $vu^2 = 2(uv)u$, d'où $VU^2 \subset U^2$. ▪

4.4. **Remarque**.La relation $4z^2(ez) = \alpha z^3$ entraîne que $u^3 = 0$, pour $u \in U$. En polarisant on obtient l'identité de Jacobi pour les éléments de U : $s(uw) + w(su) + u(ws) = 0$. Enfin, forcément $V \neq \{0\}$: le cas contraire, on montre sans difficulté que A vérifie $x^2 = \omega(x)x$. ▪

4.5. **Proposition**. Soient $e \in Ip(A)$ et $\delta = (1 - 2\lambda)^{-1}$. On a :

a) $Ip(A) = \{e_\sigma = e + \sigma + \delta\sigma^2 \;/\; \sigma \in U\}$. Puis, si $A = Ke_\sigma \oplus U_\sigma \oplus V_\sigma$ est la décomposition de Peirce par rapport a l'idempotent e_σ, on a :

b) $U_\sigma = \{u_\sigma = u + 2\delta\sigma u \;/\; u \in U\}$ et $V_\sigma = \{v_\sigma = v - 2\delta f(\sigma)v \;/\; v \in V\}$ où $f(\sigma) = \sigma$ si $V^2 \subset V$ et $f(\sigma) = \sigma + \delta\sigma^2$ si $V^2 \subset U$.

c) L'application linèaire $T_\sigma : A \to A$, $T_\sigma(x) = x_\sigma$, est bijective.

Démonstration. Comme $u^3 = 0$, il est simple de constater que $e_\sigma \in Ip(A)$. Pour la reciproque, soit $\varepsilon \in Ip(A)$; comme $\omega(\varepsilon) = 1$, $\varepsilon = e + u + v$ avec $u \in U$ et $v \in V$. De $\varepsilon^2 = \varepsilon$ on a $(1 - 2\lambda)v = (u + v)^2$; mais $((u + v)^2)^2 = 0$, donc $(1 - 2\lambda)v = u^2 + 2uv$. Or, $uv \in U$: il s'ensuit que $v = \delta u^2$ donc que $\varepsilon = e_u$. Quant à (b), montrons la deuxième affirmation : soit $x = u + v$; en tenant compte des relations données par 4.3.(b) et (c), de l'équation $e_\sigma x = \lambda x$ on déduit : (1) dans le cas $V^2 \subset U$: $(2\lambda - 1)u = 2(\sigma v + \delta\sigma^2 u + \delta\sigma^2 v)$ et $\sigma u = 0$; (2) dans le cas $V^2 \subset V$: $(2\lambda - 1)u = 2(\sigma v + \delta\sigma^2 u)$ et $\sigma u + \delta\sigma^2 v = 0$. Or, dans les deux cas $\sigma^2 u = 0$: en effet, pour le cas (1) ceci sort de $\sigma u = 0$ et de l'identité de Jacobi (remarque 4.4) ; pour le cas (2), il suffit de multiplier $(2\lambda - 1)u = 2(\sigma v + \delta\sigma^2 u)$ par σ^2 et d'utiliser les relations données dans 4.3(d). L'affirmation (c) est immédiate. ▪

4.6. **Proposition**. Parmi les invariants de l'algèbre, nous avons :
a) les dimensions de U et de V ;
b) les idéaux $UV + V^2 + U^2$, $U \oplus U^2$, $Ann_U(U)$ et $Ann_A(U \oplus U^2)$ (où $Ann_X(Y)$ est le sous-espace $\{ x \in X / \ xY = 0 \}$) ;
c) la sous-algèbre $C_A = Ke \oplus U \oplus U^2$ (appelé le coeur de l'algèbre).

Démonstration. La première affirmation est immédiate car $U_\sigma = T_\sigma(U)$ et $V_\sigma = T_\sigma(V)$. Par la suite, on s'appui sur le théorème 4.3 : $Ker(\omega)^2 = UV + V^2 + U^2 =$ est un idéal invariant de A. Pour le reste, on a $A(U \oplus U^2) = U + U^2 + U^3 + VU + VU^2 = U \oplus U^2$; puis, pour tout $\sigma \in U$, $U_\sigma \subset U \oplus U^2$ d'où $U_\sigma^2 \subset (U \oplus U^2)^2 \subset U \oplus U^2$ donc $U_\sigma \oplus U_\sigma^2 \subset U \oplus U^2$; comme $Ip(A) = \{e_\sigma \ / \ \sigma \in U\}$ il s'ensuit que $U_\sigma \oplus U_\sigma^2 = U \oplus U^2$, donc que $U \oplus U^2$ est un invariant de A (comme $e_\sigma \in Ke \oplus U \oplus U^2$, on remarque que l'affirmation (c) en découle). Pour ce qui est de la structure d'idéal de $Ann_U(U)$ et $Ann_A(U \oplus U^2)$ on utilise les mêmes méthodes; pour leur invariance on s'en remet à la proposition qui suit. ▪

4.7. **Proposition**. $Ann_U(U) = Ann_U(U \oplus U^2)$. De plus, $Ann_A(U \oplus U^2) = \bigcap U_\sigma \oplus \bigcap V_\sigma$.

Démonstration. Il est clair que $Ann_U(U \oplus U^2) \subset Ann_U(U)$; pour la réciproque, de la linéarisation de $u^3 = 0$ on obtient $us^2 + 2s(us) = 0$ pour tout $u, s \in U$; de ce fait, si $u \in Ann_U(U)$ alors $u \in Ann_U(U^2)$, ce qui établit la première égalité. Quant à la seconde, il est clair que $Ann_A(U \oplus U^2) = Ann_U(U \oplus U^2) \oplus Ann_V(U \oplus U^2)$; montrons que $Ann_U(U \oplus U^2) = \bigcap U_\sigma$: on a $T_\sigma(u) = u + 2\delta\sigma u$ donc $T_\sigma(Ann_U(U)) = Ann_U(U)$ d'où $Ann_U(U) \subset \bigcap U_\sigma$. Reciproquement, soit $x \in \bigcap U_\sigma$; (donc $x \in U$, car $U = U_O$) : pour chaque $\sigma \in U$, existe $u \in U$ tel que $x = u + 2\delta\sigma u$; d'où pour tout $\sigma \in U$, $x - u = \sigma u = 0$ (car $x - u \in U$ et $\sigma u \in V$); il s'ensuit que $x = u$ donc $x \in Ann_U(U)$. Enfin, que $Ann_V(U \oplus U^2) = \bigcap V_\sigma$ se démontre avec les mêmes techniques. ▪

5. Le cas : $\alpha = 4\lambda$

On rappelle que A vérifie $(x^2)^2 = 4\lambda\omega(x)x^3 + (1 - 2\lambda - 4\lambda^2)\omega(x)^2x^2 + (4\lambda^2 - 2\lambda)\omega(x)^3x$ et admet une décomposition de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus V$ avec $U^2 \subset V$, $UV \subset U$ et $V^2 \subset U$. En plus des relations données dans 4.3.(d), de $V^2 \subset U$ on a :

5.1. **Proposition**. $U \neq \{0\}$ et $UV^2 = U^2V^2 = \{0\}$. De plus, pour tout $u, s \in U$, $v, w \in V$, on a : $u(sv) + s(uv) = (uv)(sw) + (uw)(sv) = 0$.

Démonstration. Si l'on avait $U = \{0\}$, alors $x^3 = (1+\lambda)\omega(x)x^2 - \lambda\omega(x)^2x$ serait vérifiée. Le reste ne pose pas de problèmes (les mêmes techniques utilisées ci-dessus). ▪

5.2. **Remarque**. Avec l'identité de Jacobi pour les éléments de U et les relations données dans la proposition ci-dessus, on montre sans difficulté que les morphismes de Peirce sont multiplicatifs sur U. Par la suite, nous aurons besoin des quatre premières puissances principales de $x \in A$, avec $\omega(x) = 1$: $x = e + u + v$, $x^2 = e + u + 2\lambda v + u^2 + v^2 + 2uv$, $2x^3 = 2e + 2u + 2\lambda(2\lambda+1)v + 2(\lambda+1)u^2 + (4\lambda+1)v^2 + 4(\lambda+1)uv + 2u^2v + 4v(uv)$ et $4x^4 = 4e + 4u + 4\lambda(2\lambda^2+\lambda+1)v + 4(\lambda^2+\lambda+1)u^2 + (8\lambda^2+8\lambda+1)v^2 + 8(\lambda^2+\lambda+1)uv + (4\lambda+6)u^2v + 4(2\lambda+3)v(uv) + 4v(u^2v) + 8v(v(uv))$. ▪

5.3. **Proposition**. L'algèbre $C_A = Ke \oplus U \oplus U^2$ est train de rang 4.

Démonstration. Remarquons que $(U^2)^3 = U^2(U^2)^2 \subset U^2V^2 = \{0\}$. Avec les relations du théorème 4.3 et de la proposition 5.1 et en utilisant le fait que $T_\sigma(u^2) = T_\sigma(u)^2$ (remarque 5.2) il vient que $(U^2)^3 = \{0\}$ est un invariant de structure, donc $(U^2_\sigma)^3 = \{0\}$ d'où $v^3_\sigma = 0$ pour tout $\sigma \in U$ et $v \in U^2$. Or, comme $v_\sigma = (v - 2(\delta\sigma + (\delta\sigma)^2)v)$, du cube nul on déduit que $((\sigma v)v)v = 0$. Ces précisions étant faites, soit $x \in A$, $\omega(x) = 1$; en tenant compte des puissances développées à la remarque 5.2, on a : $4x^4 - 2(3+2\lambda)x^3 + 2(1+3\lambda)x^2 - 2\lambda x = 0$, d'où l'énoncé. ▪

5.4. **Proposition**. Le quotient $A/\mathrm{Ann}_U(U)$ est une algèbre train de rang 3.

Démonstration. Comme $\mathrm{Ann}_U(U) \subset \mathrm{Ker}(\omega)$, $\varpi = \omega \circ p$ (où $p : A \to A/\mathrm{Ann}_U(U)$ est la projection canonique) est une pondération. Pour établir le résultat il suffit de constater que si $x \in A$, alors $x^3 - (1+\lambda)\omega(x)x^2 + \lambda\omega(x)^2x \in \mathrm{Ann}_U(U)$; en effet, soit $x = e + u + v$; par la remarque 5.2 on a : $2x^3 - 2(1+\lambda)x^2 + 2\lambda x = 4(uv)v + 2v^3 + 2vu^2 + (2\lambda - 1)v^2$, ce qui donne un élément de U. Puis, si $s \in U$, montrons que $s(x^3 - (1+\lambda)x^2 + \lambda x) = 0$: en effet, on a $s((uv)v) = -(uv)(sv) = 0$ (ces égalités se déduisent, respectivement, des deux dernières relations de la proposition 5.1); de même, car $V^2 \subset U$, $sv^3 = s(vv^2) = -(sv)v^2$ enfin, comme $UV^2 = \{0\}$, il vient que $(sv)v^2 = s(vu^2) = sv^2 = 0$ ▪

5.5. **Corollaire**. $\mathrm{Ann}_U(U) \neq \{0\}$. ▪

5.6. **Proposition**. Si A est de dimension finie, l'idéal $U \oplus U^2$ est nilpotent.

Démonstration. Comme $\mathrm{Ann}_U(U) \subset C_A = Ke \oplus U \oplus U^2$, par la proposition 5.4 l'algèbre quotient $C_A/\mathrm{Ann}_U(U)$ vérifie $x^3 = (1+\lambda)\varpi(x)x^2 - \lambda\varpi(x)^2x$, d'où $U \oplus U^2/\mathrm{Ann}_U(U)$ satisfait l'identité $x^3 = 0$. Il s'ensuit que $U \oplus U^2/\mathrm{Ann}_U(U)$ est nilpotent (c.f.[14] page 114), donc il existe un entier n tel que $(U \oplus U^2)^n \subset \mathrm{Ann}_U(U)$. De ce fait, par la proposition 4.6, il vient que $(U \oplus U^2)^{n+1} \subset \mathrm{Ann}_U(U)(U \oplus U^2) = \{0\}$. ▪

6. Le cas : $\alpha = 1 + 2\lambda$

Les démonstrations des résultats qui suivent utilisent les mêmes techniques employées dans le paragraphe précédant. C'est pour cela qu'elles sont en général omises, sauf dans certains cas où on donne quelques indications.

On rappelle que A vérifie $(x^2)^2 = (2\lambda + 1)\omega(x)x^3 - (\lambda + 2\lambda^2)\omega(x)^2x^2 + (2\lambda^2 - \lambda)\omega(x)^3x$ et admet une décomposition de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus V$ avec $U^2 \subset V$, $UV \subset U$ et $V^2 \subset V$. Outre les relations exprimées dans 4.3.(d), le fait d'avoir $V^2 \subset V$ donne :

6.1. **Proposition**. Soient u, $s \in U$ et v, $w \in V$, alors : $v^3 = 0$ (d'où l'identité de Jacobi pour les éléments de V), $u(vw) = (uv)w + (uw)v$ (donc $UV^2 \subset (UV)V \subset UV$), et $v(us) = (uv)s + (sv)u$ (donc $VU^2 \subset (UV)U \subset U^2$). ▪

6.2. **Proposition**. Les sous-espaces $UV\oplus V$, $UV\oplus U^2$, $V\oplus(U^2 + V^2)$, $Ann_V(U)$ et $Ann_A(U)$ sont des idéaux invariants de A.

Démonstration. Montrons-le pour $Ann_V(U)$: que $(Ke \oplus U)Ann_V(U) \subset Ann_V(U)$ est immédiat; puis, comme $u(vw) = (uv)w + (uw)v$ et $UV \subset U$, si $v \in Ann_V(U)$ il s'ensuit que $vV \subset Ann_V(U)$. L'invariance de $Ann_V(U)$ est donnée par la proposition qui suit. ▪

6.3. **Proposition**. On a : $Ann_A(U) = Ann_U(U) \oplus Ann_V(U)$; de plus, $Ann_V(U) = \bigcap V_\sigma$. ▪

6.4. **Proposition**. L'algèbre A vérifie $x^4 = (1 + 2\lambda)\omega(x)x^3 - (2\lambda + \lambda^2)\omega(x)^2x^2 + \lambda^2\omega(x)^3x$.

Démonstration. On calcule $x^4 - (1 + 2\lambda)x^3 + (2\lambda + \lambda^2)x^2 - \lambda^2x$, avec $x = e + u + v$, en tenant compte des relations suivantes : pour tout $u \in U$ et $v \in V$ on a : $2u(uv^2) = u^2v^2$; $u^2v^2 + 2(u^2v)v = 0$; $u(u^2v) = 0$ et enfin, $(uv^2)v = 2((uv)v)v = (uv)v^2 = 0$. ▪

6.5. **Lemme**. Pour tout x, $y \in A$, $x^2(xy) - x(x^2y) \in UV\oplus V$.

Démonstration. Soient x, $y \in A$; on pose $x = \omega(x)e + 4u + s$ et $y = \omega(y)e + 4w + z$ (il va de soi que $U\oplus V = U + (UV\oplus V)$) avec u, $w \in U$ et s, $z \in UV\oplus V$. Or, du fait que $UV\oplus V$ est un idéal, d'un petit calcul on obtient $x^2(xy) = \omega(x)^3\omega(y)e + 3\omega(x)^2\omega(y)u + \omega(x)^3w + s'$ et $x(x^2y) = \omega(x)^3\omega(y)e + 3\omega(x)^2\omega(y)u + \omega(x)^3w + z'$ avec s', $z' \in UV\oplus V$. L'énoncé suit. ▪

6.6. **Corollaire**. Le quotient $A/UV\oplus V$ et $Ker(\omega)$ sont des algèbres de Jordan. ▪

Si l'on pose $x = \omega(x)e + u + v$ et l'on calcule l'expression $x^2(xy) - x(x^2y)$ de façon détaillé, on obtient $x^2(xy) - x(x^2y) = \lambda(1 - \lambda)\omega(x)\omega(y)[2uv + v^2 + (1 - 2\lambda)\omega(x)v$. On voit que pour $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$, l'algèbre est de Jordan. Tout ceci permet de compléter, en donnant la réciproque, le théorème 3.8 :

6.7. **Théorème**. Les conditions suivantes sont équivalentes:
a) A est à puissances associatives.
b) A satisfait une des identités: $(x^2)^2 = \omega(x)x^3$ ou $(x^2)^2 = 3\omega(x)x^3 - 3\omega(x)^2x^2 + \omega(x)^3x$.
c) A est de Jordan. ▪

Les autheurs tiennent à rémercier le referée de ses conseils.

Bibliographie

1. M.T.Alcalde, C.Burgueño, A.Labra, A.Micali, *Sur les algèbres de Bernstein*. Proc. London Math. Soc. **58** (3), 51-68, (1989).

2. C. Burgueño, C. Mallol, *Morphismes de Peirce et orthogonalité dans les algèbres de Bernstein*. Linear Algebra and its Applications, **219**, (1995), 179-186.
3. R. Costa, *Principal train algebras of rank 3 and dimension $\leq$ 5*. Proc. Edinburgh Math. Soc., **33** (1990), 61-70.
4. I.M.H. Etherington, *Genetics Algebras*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh **59**, 242-258, 1939.
5. P. Holgate, *Genetic algebras satisfying Bernstein stationarity principle*. J. London Math. Soc. (2) **9** (1975), 613-623.
6. S. González, C. Martínez, *Idempotent elements in a Bernstein algebra*. J. London Math. Soc. (2) **42** (1990), 430-436.
7. A.Labra, C. Mallol, A.Suazo, *Power-associative Bernstein algebras of order 2*. Nova Journal of Algebra and Geometry Vol. **3**, N° 3, pp. 83 - 96, 1994.
8. C. Mallol, A. Micali, M. Ouattara, *Sur les Algèbres de Bernstein IV*. Linear Algebra and its Applications, **158**: 1 - 26 (1991).
9. C. Mallol, R. Varro, *Les algèbres de Mutation*. Non associative Algebra and its Applications, Kluwer Academic Pub. 245-251, Amsterdam 1994.
10. C. Mallol, R. Varro, *A propos des algèbres vérifiant $x^{[3]} = \omega(x)^3x$*. Linear Algebra and its Applications, **225**: 187 - 194 (1995).
11. C. Mallol , *Extensions Pondérées d'Algèbre*. Algebras. Groups and Geometries, 14-1, 41-48, 1997.
12. S. Walcher, *Algebras with satisfy a train equation for the first three plenary powers*. Arch. Math (Basel) **56** : 547-551 (1991).
13. A. Worz-Buzekros, *"Algebras in Genetics"*. Lecture Notes in Biomathematics, Vol. **36**, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1980.
14. K.A.Zhevlakov, A.M.Slinko, I.P.Shestakov, A.I.Shirshov, *"Rings that are Nearly Associative"*. Academic Press, New York, (1982).

Received: March 1999

Revised: July 1999