NORTH-HOLLAND

A Propos des Algèbres Vérifiant $x^{[3]} = \omega(x)^3 x$

C. Mallol et R. Varro
Département de Mathématiques et Informatique Appliquées
Université de Montpellier III
BP 5043
34032 Montpellier Cedex 1, France

Submitted by Richard A. Brualdi

RÉSUMÉ

Nous étudions le dictionnaire de passage entre deux décompositions de Peirce de ce type d'algèbre et les morphismes ad hoc qui entrent en jeu.

1. INTRODUCTION

Les algèbres pondérées (A, ω) vérifiant $x^{[3]} = \omega(x)^3 x$ ont été approchées selon trois points de vue: S. Walcher [5] établit que ces algèbres sont génétiques et il montre qu'elles ne sont pas en général des train-algèbres de rang 3 bien qu'elles soient obtenues à partir de l'équation $2x^3 - \omega(x)x^2 - \omega(x)^2 x = 0$ (cf. [2]). Puis, dans [1], en partant de la notion de relations polynômiales symétriques on établit qu'il suffit que ω soit une forme linéaire, sa multiplicativité résultant de la relation $x^{[3]} = \omega(x)^3 x$. Enfin, dans [4] ces algèbres apparaissent comme étant de Bernstein d'ordre 0 et de période 2, notées $B(0, 2)$-algèbres; nous garderons cette appellation. On y démontre que si K est un corps de caractéristique 2 ou si A est une algèbre associative alors toute $B(0, 2)$-algèbre est quasi-constante. Par conséquent dans ce qui suit K est un corps commutatif de caractéristique $\geqslant 5$ (non nécessairement infini) et A une K-algèbre commutative, non associative.

0024-3795/95/$9.50
SSDI 0024-3795(93)00339-2

2. STRUCTURE DE L'ALGÈBRE

DÉFINITION 2.1. Une algèbre pondérée (A, ω) est $B(0, 2)$ si $x^{[3]} = \omega(x)^3 x$ pour tout x dans A et il existe $y \in A$, $y^2 \neq \omega(y)y$.

PROPOSITION 2.2. *Les énoncés suivants sont équivalents*:

(a) *A est une $B(0, 2)$-algèbre.*

(b) *Il existe $e \in A$, $e^2 = e$ et on a $A = Ke \oplus U \oplus V$, $U = \{x \mid ex = \frac{1}{2}x\}$, $V = \{x \mid ex = -\frac{1}{2}x\}$, avec $V \neq \{0\}$, $U^2 \subset V$, $V^2 \subset V$, $UV \subset U$, $x^2(xy) = 0$ pour tout $x \in U \oplus V$, $y \in A$.*

(c) *Il existe un idéal S, $e \in A$, $z \in S$ tels que* codim $S = 1$, $e^2 = e$, $ez = -\frac{1}{2}z \neq 0$, *et pour tout $x \in S$, $y \in A$, $e(ex) = \frac{1}{4}x$, $2(xy)^2 + x^2y^2 = 0$.*

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b): Pour l'existence d'un idempotent dans A, la décomposition $\operatorname{Ker} \omega = U \oplus V$ et les inclusions on se référera à [5]. On a $V \neq \{0\}$, car sinon on aurait $U^2 = \{0\}$ d'où $y^2 = \omega(y)y$, $y \in A$, ce qui contredit la définition 2.1.

(b) $\Rightarrow$ (c): L'espace $S = U \oplus V$ est un idéal de A. Montrons que $2(xy)^2 + x^2y^2 = 0$ pour $x \in S$, $y \in A$. En polarisant $x^2(xy) = 0$ on trouve $2(xy)^2 + x^2y^2 = 0$ pour tout x, $y \in S$. En prenant $x = u + v$ où $u \in U$, $v \in V$ on vérifie sans difficulté que $2(ex)^2 + ex^2 = 0$.

(c) $\Rightarrow$ (a): On a $e \notin S$, sinon $e^3 = \frac{1}{4}e$ d'où $e = 0$ et $S = \{0\}$. L'application $\omega : Ke \oplus S \to K$, $\alpha e + x \to \alpha$ est une pondération de A. En développant $2[x(x + y)]^2 + x^2(x + y)^2 = 0$ où $x \in S$, $y \in A$ on obtient $x^2(xy) = 0$. Alors par un simple calcul on vérifie que pour tout $\alpha \in K$, $x \in S$ on a $(\alpha e + x)^{[3]} = \alpha^3(\alpha e + x)$. Soit $z \in S$, $z \neq 0$ tel que $ez = -\frac{1}{2}z$; on a $(e + z)^2 \neq e + z$, sinon $z^2 = 2z$ d'où $0 = z^{[3]} = 8z$ ce qui est impossible. Il existe donc $x \in A$ tel que $x^2 \neq \omega(x)x$ c'est-à-dire que A est une $B(0, 2)$-algèbre. ∎

COROLLAIRE 2.3. *Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ une $B(0, 2)$-algèbre. On a $A^2 = A$, $\dim_K A \geqslant 2$ et la sous-algèbre $Ke \oplus V$ est une $B(0, 2)$-algèbre.*

Démonstration. Pour tout $x \in \operatorname{Ker} \omega$ on a $x = u + v = 2e(u - v)$ d'où $A \subset A^2$. Le reste découle de la proposition 2.2. ∎

Désormais A désignera une $B(0, 2)$-algèbre.

Les relations suivantes seront souvent utilisées dans la suite.

PROPOSITION 2.4.

$$x^2(xy) = 0, \quad x(x^2y) = 0; \qquad x \in \operatorname{Ker} \omega, \quad y \in A; \tag{1}$$

$$2(xy)(xz) + x^2(yz) = 0; \qquad x, y, z \in \operatorname{Ker} \omega; \tag{2}$$

$$u^2x + 4u[u(ex)] = 0, \quad v^2x - 4v[v(ex)] = 0;$$

$$(u, v, x) \in U \times V \times \operatorname{Ker} \omega; \tag{3}$$

$$u^3 = 0; \qquad u \in U \quad (resp.\, V); \tag{4}$$

$$(us)t + (ut)s + (st)u = 0; \qquad u, s, t \in U \quad (resp.\, V); \tag{5}$$

$$(us)v = (sv)u + (uv)s;$$

$$(u, s, v) \in U \times U \times V \quad (resp.\, V \times V \times U). \tag{6}$$

Démonstration. Les relations de (1) ont été établies en [5]. Quant aux autres relations, en linéarisant l'identité $x^2(xy) = 0$ ($x \in \operatorname{Ker} \omega$, $y \in A$) on obtient $(x_1x_2)(x_3y) + (x_1x_3)(x_2y) + (x_2x_3)(x_1y) = 0$ avec x_1, x_2, $x_3 \in \operatorname{Ker} \omega$, $y \in A$. Si on pose $x_1 = x_2 = x$, $x_3 = z$ on a (2), Puis, si $x_1 = x_2 = u \in U$, $x_3 = x \in \operatorname{Ker} \omega$, et $y = e$ on a $u(ux) + u^2(ex) = 0$ d'où $u[u(ex)] + u^2[e(ex)] = 0$ d'où (3) car $e(ex) = \frac{1}{4}x$. La relation (4) découle de (3). Enfin, si $(x_1, x_2) = (u, s) \in U \times U$, $x_3 = t \in U$ [resp. $x_3 = v \in V$] et $y = e$, il en résulte (5) [resp. (6)]. ■

De la relation (1) il apparaît que $\operatorname{Ker} \omega$ est une algèbre de Jordan. Cependant, A n'est jamais de Jordan, car:

PROPOSITION 2.5. *L'algèbre A n'est pas à puissances associatives.*

Démonstration. Si A était à puissances associatives, le spectre de l'application $L_e : x \to ex$ serait contenu dans $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$. ■

3. TRANSFORMATIONS DE PEIRCE ET AUTOMORPHISMES

Dans [1] on établit que $\operatorname{Ip}(A) = \{e + u + \frac{1}{2}u^2 \mid u \in U\}$. Dans la décomposition de Peirce $A = Ke \oplus U \oplus V$, les espaces U et V dépendent du choix de l'idempotent e. Dans la proposition ci-dessous on étudie la relation entre deux décompositions de Peirce.

PROPOSITION 3.1. *Soient e, $e' \in \mathrm{Ip}(A)$, $Ke \oplus U \oplus V$ et $Ke' \oplus U' \oplus V'$ les décompositions de A relativement à e et e'. Alors il existe un unique $s \in U$ tel que $U' = \{u + su \mid u \in U\}$ et $V' = \{v - sv \mid v \in V\}$.*

Démonstration. Montrons $U' = \{u + su \mid u \in U\}$, la démonstration étant identique pour $V' = \{v - sv \mid v \in V\}$. Or, il existe un unique $s \in U$ tel que $e' = e + s + \frac{1}{2}s^2$. Soit $x = u + v$, $(u, v) \in U \times V$, alors $2e'x = (u + 2sv + s^2u) + (-v + 2su + s^2v)$. Donc $x \in U'$ si et seulement si on a (i): $2sv + s^2u = 0$ et (ii): $2v = 2su + s^2v$. A l'aide de (1) et (3) on déduit de (i) que $s^2v = 0$, d'où $v = su$ et $x = u + su$. Réciproquement, si $x = u + su$, où s, $u \in U$, avec les relations (1) et (3) on établit sans problème que $2e'x = x$. ■

Soit $e \in \mathrm{Ip}(A)$; l'application $s \to e + s + \frac{1}{2}s^2$ étant bijective on note $e_s = e + s + \frac{1}{2}s^2$, $u_s = u + su$, $v_s = v - sv$ et $Ke_s \oplus U_s \oplus V_s$ la décomposition de Peirce relative à e_s.

Les transformations de Peirce associées à l'idempotent e, sont les applications $\varphi_s : A \to A$, définies par $\varphi_s(\lambda e + u + v) = \lambda e_s + u_s + v_s$, $\lambda \in K$ (cf. [3]). Elles sont linéaires et bijectives. Pour simplifier l'écriture on notera $\varphi_s(x) = x_s$ (on a, donc, $(x + y)_s = x_s + y_s$ et $x_s = 0 \Leftrightarrow x = 0$). Enfin, on note P_s l'ensemble des transformations de Peirce qui émergent de la décomposition déterminée par e_s, i.e., $P_s = \{\varphi_{u_s} \mid u \in U\}$. On convient que $e_0 = e$, $U_0 = U$, $V_0 = V$ et $P_0 = P$.

Ces applications ne sont pas en général des morphismes d'algèbres. En particulier l'image par φ_s d'un idempotent n'est pas toujours un idempotent comme on peut le voir dans l'exemple qui suit.

EXEMPLE 3.2. Soit $A = Ke \oplus U \oplus V$ avec $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ base de U, $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ base de V et $u_1^2 = v_1$, $u_1u_2 = v_2$, $u_1u_3 = \frac{1}{2}v_3$, $u_1v_2 = -\frac{1}{2}u_4$, $u_1v_4 = u_3$, $u_2^2 = v_4$, $u_2u_4 = \frac{1}{2}v_3$, $u_2v_1 = u_4$, $u_2v_2 = -\frac{1}{2}u_3$, $v_1v_4 = v_3$, $v_2^2 = -\frac{1}{2}v_3$, les autres produits étant nuls. On a $\varphi_{u_1}(e_{u_2}) = e + (u_1 + u_2 - \frac{1}{2}u_3) + \frac{1}{2}(v_1 + 2v_2 + v_4)$, or $(u_1 + u_2 - \frac{1}{2}u_3)^2 = (v_1 + 2v_2 + v_4) - \frac{1}{2}v_3$, donc $\varphi_{u_1}(e_{u_2}) \notin \mathrm{Ip}(A)$. ■

PROPOSITION 3.3.

(a) $\varphi_s(\mathrm{Ip}(A)) \subset \mathrm{Ip}(A) \Leftrightarrow s^2U^2 = \{0\}$.
(b) $\varphi_s(\mathrm{Ip}(A)) \neq \mathrm{Ip}(A) \Rightarrow sU^2 \neq \{0\}$.

Démonstration. (a): Pour tout $u \in U$, $\varphi_s(e_u) \in \mathrm{Ip}(A)$ si et seulement si on a $(u + s - \frac{1}{2}su^2)^2 = (u + s)^2$; par (1) et (3), ceci est équivalent à $s^2u^2 = 0$.

(b) Pour tout $u \in U$, $\varphi_s(e_u) = e_{s+u} - \frac{1}{2}su^2$. Par consèquent si $sU^2 = \{0\}$ on a $e_u = \varphi_s(e_{u-s})$ et donc $\mathrm{Ip}(A) \subset \varphi_s(\mathrm{Ip}(A))$.

PROPOSITION 3.4. $P \subset \mathrm{Aut}_K(A) \Leftrightarrow U^2 \subset \mathrm{Ann}[(\mathrm{Ker}\ \omega)^2]$.

Démonstration. Soit $x = u + v$, $u \in U$, $v \in V$. Avec les relations (3) et (5) on a $\varphi_s(x^2) = \varphi_s(x)^2$ si et seulement si $[s(u - v)]^2 = 0$, i.e., $[s(ex)]^2 = 0$ d'où par la relation (2), $s^2x^2 = 0$. ■

REMARQUE 3.5. *Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}_K(A)$ comme $\varphi(e) \in \mathrm{Ip}(A)$ il existe un unique $s \in U$ tel que $\varphi(e) = e_s$. Il s'ensuit que $\varphi(U) = U_s$, $\varphi(V) = V_s$ et que l'application $f = \varphi_s^{-1} \circ \varphi$ vérifie $f(e) = e$, $f(U) = U$, $f(V) = V$. Posons $F = \{\varphi_t^{-1} \circ \varphi \mid t \in U, \varphi \in \mathrm{Aut}_K(A), \varphi(e) = e_t\}$; par construction tout automorphisme s'écrit de manière unique: $\varphi = \varphi_s \circ f$. Plus généralement, si $s \in U$, on pose $F_s = \{\varphi_{t_s}^{-1} \circ \varphi \mid t \in U, \varphi \in \mathrm{Aut}_K(A), \varphi(e_s) = e_{t_s}\}$; bien entendu, $F_0 = F$.*

PROPOSITION 3.6. *Pour tout $f \in F \cap \mathrm{Aut}_K(A)$ on a: $f \circ \varphi_s = \varphi_{f(s)} \circ f$ et $\varphi_s \circ f = f \circ \varphi_{f^{-1}(s)}$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer $f \circ \varphi_s$ et $\varphi_{f(s)} \circ f$ à e, $u \in U$ et $v \in V$. ■

THÉORÈME 3.7.

1) $P_s = P, \forall s \in U \Leftrightarrow U^3 = \{0\}$ *et* $s(tv) = t(sv), \forall s, t \in U, v \in V$. *Dans ces conditions,* $P \subset \mathrm{Aut}_K(A)$.

2) *Les énoncés suivants sont équivalents*

(*a*) $U \subset \mathrm{Ann}(U^2 + UV)$.

(*b*) *Pour tout* $s, t \in U$, $\varphi_s \circ \varphi_t \in P$.

(*c*) *Pour tout* $s, t \in U$, $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$.

(*d*) *P est un sous-groupe abélien invariant de $\mathrm{Aut}_K(A)$.*

Dans ces conditions, $P_s = P$ *pour tout* $s \in U$.

Démonstration. 1) Si pour tout $s \in U$ on a $P_s = P$ alors $\forall t \in U$ il existe $u \in U$ tel que $\varphi_{t_s} = \varphi_u$. En identifiant les termes de $\varphi_{t_s}(s) = \varphi_{t_s}((s - s^2)_s) = \varphi_u(s)$ on déduit que: $(ts)s + 2ts^2 = 0$ donc, par (3), $U^3 =$

$\{0\}$. Puis, de $\varphi_{t_s}(e_s) = \varphi_u(e_s)$ on a $u = t$. Enfin, la relation $s(tv) = t(sv)$ découle de $\varphi_{t_s}(v_s) = \varphi_t(v_s)$ et de (6). La réciproque se fait sans difficulté. De $U^3 = \{0\}$ il vient $U^2(U^2 + UV) = \{0\}$; puis de $s(tv) = t(sv)$, pour tout s, $t \in U$, $v \in V$, avec (2) et (3) on montre que $U^2V^2 = \{0\}$.

2) (d) $\Rightarrow$ (b) est immédiat. On va montrer: (a) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a) et (a) $\Rightarrow$ (d). (a) $\Rightarrow$ (c) Il suffit d'appliquer $\varphi_s \circ \varphi_t$ et φ_{s+t} à e, $u \in U$, $v \in V$. L'implication (c) $\Rightarrow$ (b) est triviale. (b) $\Rightarrow$ (a) Par hypothèse pour tout s, $t \in U$ il existe $u \in U$ tel que $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_u$. De $(\varphi_s \circ \varphi_t)(w) = \varphi_u(w)$ où $w \in U$ on obtient $w(s + t - u) = s(tw) = 0$ (2.2). Avec la même technique on a $s(tw) = 0$ quand $w \in V$. Ceci prouve que $U(U \operatorname{Ker}(\omega)) = \{0\}$. (a) $\Rightarrow$ (d) En appliquant (3): $U^2 \operatorname{Ker}(\omega) = \{0\}$ d'où $U^2 \operatorname{Ker}(\omega)^2 = \{0\}$ donc $P \subset \operatorname{Aut}_K(A)$, (prop. 3.4). Ensuite pour tout $s \in U$, d'après (d) on a $\varphi_s \circ \varphi_{-s} = \mathrm{id}_A$ d'où $\varphi_s^{-1} = \varphi_{-s}$ et P est un sous-groupe de $\operatorname{Aut}_K(A)$; il est invariant car $\forall \varphi \in \operatorname{Aut}_K(A)$, $u \in U$ avec 3.5 et 3.6 on a $\varphi \circ \varphi_u = \varphi_s \circ f \circ \varphi_u = \varphi_s \circ \varphi_{f(u)} \circ f = \varphi_{f(u)} \circ \varphi_s \circ f = \varphi_{f(u)} \circ \varphi$. ∎

PROPOSITION 3.8. *Dans les conditions du théorème* 3.7-(2) *on a*:

(*a*) *F est un sous-groupe de* $\operatorname{Aut}_K(A)$ *et* $F = \operatorname{Aut}_K(A)/P$.
(*b*) *Pour tout* $s \in U$, $F_s = \operatorname{int}_{\varphi_s}(F)$.
(*c*) $\operatorname{Aut}_K(A)$ *est isomorphe au produit semi-direct* $U \triangledown F$.

Démonstration. (a): On a $F = \{f \in \operatorname{Aut}_K(A) \mid f(e) = e\}$ donc F est un sous-groupe de $\operatorname{Aut}_K(A)$. Puis pour tout φ, $\psi \in \operatorname{Aut}_K(A)$, $\varphi = \varphi_s \circ f$, $\psi = \varphi_t \circ g$ on a $\varphi \circ \psi^{-1} = \varphi_{s-(f \circ g^{-1})(t)} \circ f \circ g^{-1}$ (cf. 3.6) d'où $\varphi \circ \psi^{-1} \in P \Leftrightarrow f \circ g^{-1} \in P \Rightarrow f = g$, car $P \cap F = \{\mathrm{id}_A\}$. Donc la restriction à F du morphisme $\operatorname{Aut}_K(A) \to \operatorname{Aut}_K(A)/P$ est injective.

(b): Comme P_s est un sous-groupe de $\operatorname{Aut}_K(A)$ (car $P_s = P$), si $g \in F_s$, il existe $u \in U$ tel que $g = \varphi_u \circ f$. Or, $e_s = g(e_s) = (\varphi_u \circ f \circ \varphi_s)(e) = \varphi_{u+f(s)}(f(e)) = e_{u+f(s)}$ d'où $u = s - f(s)$ donc $g = \varphi_s \circ \varphi_{f(-s)} \circ f = \varphi_s \circ f \circ \varphi_{-s}$.

(c): On a $(s, f) \triangledown (t, g) = (s + f(t), f \circ g)$; l'application $(s, f) \to \varphi_s \circ f$ est un isomorphisme de $U \triangledown F$ sur $\operatorname{Aut}_K(A)$. ∎

Dans l'exemple suivant P n'est pas un sous-groupe de $\operatorname{Aut}_K(A)$:

EXEMPLE 3.9. Soient $A = Ke \oplus U \oplus V$, $\{u_1, u_2, u_3\}$ base de U et $\{v_1, v_2\}$ base de V avec $u_1^2 = v_1$, $u_1u_2 = v_2$, $u_1v_2 = -\frac{1}{2}u_3$, $u_2v_1 = u_3$, les autres produits étant nuls. On vérifie que A est $B(0, 2)$ et on a $U^3 \neq \{0\}$.

THÉORÈME 3.10. *Si* $\dim_K A \leqslant 5$ *alors* P *est un sous-groupe de* $\operatorname{Aut}_K(A)$.

Démonstration. La situation $U^3 \neq \{0\}$ ou $U(UV) \neq \{0\}$ entraîne $\dim_K A \geqslant 6$. En effet, si $U^3 \neq \{0\}$ il existe u et s dans U tels que $u^2 s \neq 0$; montrons que les systèmes $\{u, s, u^2 s\}$ et $\{us, u^2\}$ sont libres. Si $\alpha u + \beta s + \gamma u^2 s = 0$ en multipliant par u^2 on a $\beta = 0$ [cf. (4) et (6)] puis en multipliant $\alpha u + \gamma u^2 s = 0$ par u on obtient $\alpha = 0$. Que $\{us, u^2\}$ est libre est immédiat. Avec les mêmes techniques on montre que si $UV^2 \neq \{0\}$ ou $U^2 V \neq \{0\}$ $\dim_K A \geqslant 6$. Ceci permet de supposer $U(UV) \neq \{0\}$ avec $UV^2 = \{0\}$ et $U^2 V = \{0\}$; il existe donc $u, s \in U$, $v \in V$ tels que $u(sv) \neq 0$. De la relation (6) on a $u(sv) = -s(uv)$ d'où $uv \neq 0$ et $s(uv) \neq 0$. Le système $\{u, s, uv, sv\}$ est libre: comme $UV^2 = \{0\}$, en multipliant par v la relation $\alpha u + \beta s + \gamma uv + \delta sv = 0$ on obtient [cf. (3)] $\alpha uv + \beta sv = 0$ d'où $\alpha s(uv) = 0$ et donc $\alpha = \beta = 0$. Enfin, en multipliant $\gamma uv + \delta sv = 0$ par s, $\gamma s(uv) = 0$ d'où $\gamma = \delta = 0$. ∎

Par construction les ensembles P et F sont très liés. Cependant, comme le montre l'exemple qui suit, on peut avoir $P_s = P$ mais $F_s \neq F$, pour tout $s \in U$:

EXEMPLE 3.11. Soit A de base $\{e, u, v_1, v_2\}$, $eu = \frac{1}{2}u$, $ev_i = -\frac{1}{2}v_i$, $u^2 = v_1$, $v_2^2 = v_1$, les autres produits étant nuls. Pour tout $\lambda \in K$, la matrice d'un élément de $F_{\lambda u}$ est:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ (1-\alpha)\lambda & \alpha & 0 & 0 \\ 2^{-1}(1-\alpha)^2\lambda^2 & (1-\alpha)\lambda & \alpha^2 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon\alpha \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } \alpha \in K^*,\ \beta \in K,\ \varepsilon \in \{-1, 1\}.$$

Les éléments de $F_{\lambda u} \cap F_{\mu u}$, avec $\lambda \neq \mu$ sont de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

d'où $F_s \neq F$.

Notons que F est isomorphe à $K^* \times K \times \{-1, 1\}$ munit de la structure de groupe définie par $(\alpha, \beta, \varepsilon)(\alpha', \beta', \varepsilon') = (\alpha\alpha', \alpha^2\beta' + \varepsilon'\beta\alpha', \varepsilon\varepsilon')$.

Nous remercions le Referee pour ses remarques judicieuses.

REFERENCES

1 M. T. Alcade, C. Burgueno et C. Mallol, Les Pol(n, m)-algèbres, *Linear Algebra Appl.* 191:213–234 (1993).
2 I. M. H. Etherington, Commutative train algebras of ranks 2 and 3, *J. London Math. Soc.* 15:136–149 (1940).
3 C. Mallol, A Propos des Algèbres de Bernstein, Thèse de Doctorat d'Etat Univ. de Montpellier II, France, 1989.
4 R. Varro, Algèbres de Bernstein Périodiques, Thèse de Doctorat, Univ. de Montpellier II, France, 1992.
5 S. Walcher, Algebras which satisfy a train equation for the first three plenary powers, *Arch. Math (Basel)* 56:547–551 (1991).
6 A. Wörz-Busekros, *Algebras in Genetics*, Lecture Notes in Biomath. 36, Springer-Verlag, New York, 1980.

Received 16 September 1993; final manuscript accepted 24 November 1993