

Dérivations dans les Algèbres Gamétiques. III

Artibano Micali*

Institut de Mathématiques

Université de Montpellier II

Place Eugène Bataillon

34060 Montpellier Cédex, France

et

Tânia M. M. Campos, Maria C. Costa e Silva et Silvia M. M. Ferreira

Centro de Ciências Matemáticas, Físicas e Tecnológicas da

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Rua Marquês de Paranaguá 111

01303 São Paulo, SP, Brasil

Submitted by Richard A. Brualdi

ABSTRACT

Nous reprenons l'étude des dérivations dans les algèbres gamétiques commencée dans I et poursuivie dans II. Dans ce contexte, nous nous sommes intéressés aux dérivations intérieures dont une description complète y est donnée. Par la suite nous avons examiné le processus de duplication d'une algèbre et le calcul des dérivations de la dupliquée d'une algèbre gamétique. Finalement nous avons montré que l'ensemble des idempotents reste invariant, à une bijection près, quand on passe d'une algèbre gamétique à sa dupliquée.

This paper gives a complete account of derivations and inner derivations of gametic algebras, in the most general setting.

1. DERIVATIONS ET DERIVATIONS INTERIEURES

1.1. Préliminaires

Soient K un corps commutatif de caractéristique zéro, $K[X_0, X_1, \dots, X_n]$ la K -algèbre commutative et associative à élément unité des polynômes en les

*Supported by CNPq (Brasil), Processo No. 406119/82, FAPESP (Brasil), Processo No. 83/1018-3, FAPESP (Brasil), Processo No. 84/1368-7 and Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.

indéterminées $X_0, X_1, \dots, X_n$ à coefficients dans K et $A = G(n+1, 2m)$ le sous- K -espace vectoriel de $K[X_0, X_1, \dots, X_n]$ engendré par les monômes $X_0^{i_0} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}$ tels que $\sum_{k=0}^n i_k = m$. Sur le K -espace vectoriel A on définit une structure de K -algèbre commutative, non associative et sans élément unité dont la table de multiplication relativement à la base ci-dessus s'écrit

$$\begin{aligned} & (X_0^{i_0} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}) (X_0^{j_0} X_1^{j_1} \dots X_n^{j_n}) \\ &= \binom{2m}{m}^{-1} \sum_{k_0 + \dots + k_n = m} \binom{i_0 + j_0}{k_0} \binom{i_1 + j_1}{k_1} \\ & \dots \binom{i_n + j_n}{k_n} X_0^{k_0} X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}, \end{aligned}$$

quelles que soient les suites d'entiers $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ et $(j_0, j_1, \dots, j_n)$ vérifiant $\sum_{k=0}^n i_k = m$ et $\sum_{k=0}^n j_k = m$. On dira que $A = G(n+1, 2m)$ est la K -algèbre gamétique d'une population $2m$ -ploïde avec $n+1$ allèles.

On sait que toute algèbre génétique A est pondérée par une unique fonction poids (cf. [4]), c'est-à-dire, il existe un morphisme unique non nul $\omega: A \rightarrow K$ de K -algèbres. Si $A = G(n+1, 2m)$ est la K -algèbre génétique ci-dessus construite, la pondération $\omega: A \rightarrow K$ est donnée par $\omega(X_0^{i_0} X_1^{i_1} \dots X_n^{i_n}) = 1$, pour toute suite d'entiers $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ positifs vérifiant $\sum_{k=0}^n i_k = m$. Or, une algèbre gamétique A sur un corps K de caractéristique zéro est *uniquement pondérée*, c'est-à-dire, elle admet une unique pondération $\omega: A \rightarrow K$ et pour toute extension $K \rightarrow L$ où L est un corps commutatif, la L -algèbre $A \otimes_K L$ admet aussi une unique pondération, à savoir, $\omega' = \omega \otimes \text{id}_L: A \otimes_K L \rightarrow L$. En effet, il suffit de voir que si $A = G(n+1, 2m)$ est la K -algèbre gamétique d'une population $2m$ -ploïde avec $n+1$ allèles, alors $A \otimes_K L$ est la L -algèbre gamétique d'une population $2m$ -ploïde avec $n+1$ allèles. Donc, pour toute dérivation $d: A \rightarrow A$ de A , on a $\omega \circ d = 0$ (cf. [1, théorème 3.6]). La réciproque de cette assertion est vraie si $m = 1$ (cf. [9, lemme 2.1]) mais si $m \geq 2$, il existe des applications K -linéaires $d: A \rightarrow A$ vérifiant $\omega \circ d = 0$ qui ne sont pas des dérivations.

EXEMPLE 1.1.1. Considérons, dans la K -algèbre $A = G(2, 4)$, l'application K -linéaire $d: A \rightarrow A$ définie par $d(e_0) = e_1 - e_2$, $d(e_1) = 0$ et $d(e_2) = 0$, où $e_0 = X_0^2$, $e_1 = X_0 X_1$ et $e_2 = X_1^2$ est la base naturelle de la K -algèbre A . Il est évident que $\omega \circ d = 0$ mais $d(e_0) = e_1 - e_2$ et $2e_0 d(e_0) = \frac{2}{3}e_0 - \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2$, ce qui nous montre que $d: A \rightarrow A$ n'est pas une dérivation de A .

Le lemme suivant est immédiat et il nous dit, en particulier, que dans le cas où $K = \mathbb{R}$, les constantes de structure de la K -algèbre $A = G(n+1, 2m)$, relativement à sa base naturelle, peuvent être interprétées comme des probabilités, ou encore, $G(n+1, 2m)$ est une $\mathbb{R}$ -algèbre stochastique (cf. [12, chapitre 1, B]).

LEMME 1.1.2. *Quelles que soient les suites d'entiers positifs $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ et $(j_0, j_1, \dots, j_n)$ vérifiant $\sum_{k=0}^n i_k = m$ et $\sum_{k=0}^n j_k = m$, on a*

$$\sum_{k_0 + \dots + k_n = m} \binom{i_0 + j_0}{k_0} \binom{i_1 + j_1}{k_1} \dots \binom{i_n + j_n}{k_n} = \binom{2m}{m}.$$

Si $d: A \rightarrow A$ est une K -dérivation de $A = G(n+1, 2m)$, pour toute suite d'entiers positifs $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ vérifiant $\sum_{k=0}^n i_k = m$, on peut écrire

$$d(X_0^{i_0} \dots X_n^{i_n}) = \sum_{j_0 + \dots + j_n = m} \alpha_{i_0, \dots, i_n; j_0, \dots, j_n} X_0^{j_0} \dots X_n^{j_n}$$

où les $\alpha_{i_0, \dots, i_n; j_0, \dots, j_n}$ sont des éléments de K . Comme, pour toute dérivation d de A on a $\omega \circ d = 0$, alors

$$\sum_{j_0 + \dots + j_n = m} \alpha_{i_0, \dots, i_n; j_0, \dots, j_n} = 0,$$

d'où

$$d(X_0^{i_0} \dots X_n^{i_n}) = \sum_{\substack{j_0 + \dots + j_n = m \\ j \neq i}} \alpha_{i_0, \dots, i_n; j_0, \dots, j_n} (X_0^{i_0} \dots X_n^{j_n} - X_0^{j_0} \dots X_n^{i_n}).$$

En particulier, sur les idempotents de A contenus dans sa base, c'est-à-dire, sur les monômes du type X_k^m ($k = 0, 1, \dots, n$), on a

$$d(X_k^m) = \sum_{\substack{j_0 + \dots + j_n = m \\ j_k \neq m}} \alpha_{0, \dots, m, \dots, 0; j_0, \dots, j_n} (X_0^{j_0} \dots X_n^{j_n} - X_k^m) \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Nous montrerons, par la suite, que parmi les coefficients $\alpha_{0, \dots, m, \dots, 0; j_0, \dots, j_n}$ il

y $n(n+1)$ non nuls et que ceci suffisent à construire les dérivations de la K -algèbre $A = G(n+1, 2m)$. Cette construction sera reprise dans le paragraphe 1.3.

1.2. L'algèbre de Lie $M \times A$

Soient K un corps commutatif, $n \geq 1$ un nombre entier et $M_n(K)$ la K -algèbre des matrices $n \times n$ à coefficients dans K munie de sa structure naturelle d'algèbre de Lie, c'est-à-dire, $[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha$ quelles que soient les matrices α et β dans $M_n(K)$. Considérons, sur le K -espace vectoriel K^n la structure de $M_n(K)$ -module à droite définie par $x\alpha = (\sum_{i=1}^n x_i \alpha_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^n x_i \alpha_{in})$ si $x = (x_1, \dots, x_n)$ est dans K^n et $\alpha = (\alpha_{ij})$ est dans $M_n(K)$. Ceci nous permet de définir sur le K -espace vectoriel $K^n \times M_n(K)$ une structure d'algèbre de Lie au moyen de la multiplication $[(x, \alpha), (y, \beta)] = (x\beta - y\alpha, [\alpha, \beta])$, quels que soient les éléments x et y dans K^n et α et β dans $M_n(K)$. Le résultat suivant (cf. [9, théorème 2.3]) nous dit quelle est la structure de cette algèbre de Lie, notée $K^n \times M_n(K)$.

THÉORÈME 1.2.1. *Soient K un corps commutatif et $n \geq 1$ un nombre entier. L'algèbre de Lie $K^n \times M_n(K)$ n'est résoluble que si $n = 1$ ou si $n = 2$ et la caractéristique de K est 2. Dans tous les cas elle n'est jamais nilpotente ni semi-simple.*

On remarque que la construction de l'algèbre de Lie $K^n \times M_n(K)$ (s.d. pour semi-direct) ne dépend pas de la caractéristique du corps K mais il va de soi que dans le cas des algèbres gamétiques, la caractéristique de K est zéro. De plus, cette construction peut se faire même si K est un anneau commutatif à élément unité.

Plus généralement, soient K un anneau commutatif à élément unité, M un K -module unitaire et A une K -algèbre associative à élément unité. Supposons qu'il existe sur M une structure de A -module à droite unitaire au moyen d'une loi de composition $M \times A \rightarrow M$, $(x, \alpha) \mapsto x\alpha$ et considérons sur le K -module A la structure d'algèbre de Lie définie par $[\alpha, \beta] = \alpha\beta - \beta\alpha$ pour α et β dans A . Ceci nous permet de définir sur le K -module $M \times A$ une structure d'algèbre de Lie, notée $M \times A$, en posant $[(x, \alpha), (y, \beta)] = (x\beta - y\alpha, [\alpha, \beta])$, pour x, y dans M et α, β dans A . Il est clair que M devient ainsi un idéal de l'algèbre de Lie $M \times A$ et $M \times A / M \approx A$, isomorphisme d'algèbres de Lie.

Dans le cas où $A = \text{End}_K(M)$, il suffit de définir sur A la structure d'algèbre associative à élément unité donnée par $\alpha\beta = \beta \circ \alpha$ pour α et β dans

A et sur M la structure de A -module à droite définie par $x\alpha = \alpha(x)$ pour tout x dans M et α dans A . La structure d'algèbre de Lie de $M \times \text{End}_K(M)$ s'écrit alors $[(x, \alpha), (y, \beta)] = (\alpha(y) - \beta(x), \alpha \circ \beta - \beta \circ \alpha)$ pour x et y dans M et α et β dans $\text{End}_K(M)$.
s.d.

PROPOSITION 1.2.2. *Soient K un corps commutatif, M un K -espace vectoriel, A une K -algèbre associative à élément unité et supposons que M soit muni d'une structure de A -module à droite. Alors, l'algèbre de Lie $M \times A$ n'est pas nilpotente.*
s.d.

En effet, il suffit de remarquer que pour tout x dans M on a $[(x, 0), (0, 1)] = (x, 0)$ et d'appliquer le théorème d'Engel (cf. [5, chapitre 1, §3, n° 3.2]).

Ceci redonne, en particulier, la partie du théorème 1.2.1 (cf. [9, théorème 2.3]) concernant la nilpotence de l'algèbre de Lie $K^n \times M_n(K)$, démontrée directement sans faire intervenir le théorème d'Engel.
s.d.

Nous utiliserons ici la notion de trace d'une algèbre associative d'après N. Bourbaki [13, chapitre 3, §9, n° 3]. Ainsi, si K est un anneau commutatif à élément unité et A est une K -algèbre associative à élément unité munie d'une trace notée $\text{tr}: A \rightarrow K$, on dira que A est une *algèbre à trace*. Comme exemples d'algèbres à trace on a les algèbres de matrices et les algèbres quadratiques, entre autres.

LEMME 1.2.3. *Soient K un anneau commutatif à élément unité, M un K -module, A une K -algèbre associative à élément unité et à trace et supposons que M soit muni d'une structure de A -module à droite. Alors l'algèbre de Lie $L = M \times A$ vérifie $L \supsetneq [L, L]$.*
s.d.

Il suffit de noter que l'élément $(0, 1)$ de L n'est pas dans $[L, L]$.

COROLLAIRE 1.2.4. *Soient K un corps commutatif, M un K -espace vectoriel, A une K -algèbre associative à élément unité et à trace et supposons que M soit muni d'une structure de A -module à droite. Alors, l'algèbre de Lie $L = M \times A$ n'est pas semi-simple.*
s.d.

En effet, on sait (cf. [5, chapitre 2, §5, n° 5.2, corollaire]) que si L est une algèbre de Lie semi-simple, alors $L = [L, L]$.

EXEMPLE 1.2.5. Considérons la $\mathbb{Z}$ -algèbre de Lie $L = \mathbb{Z}^2 \times M_2(\mathbb{Z})$ munie de sa base naturelle $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ où $\{e_1, e_2\}$ est la base canonique
s.d.

de $\mathbf{Z}$ -module $\mathbf{Z}^2$ et $\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$ celle de $M_2(\mathbf{Z})$. La table de multiplication de L relativement à cette base s'écrit $[e_1, e_3] = e_1$, $[e_1, e_4] = e_2$, $[e_2, e_5] = e_1$, $[e_2, e_6] = e_2$, $[e_3, e_4] = e_4$, $[e_3, e_5] = -e_5$, $[e_4, e_5] = e_3 - e_6$, $[e_4, e_6] = e_4$ et $[e_5, e_6] = -e_5$, tous les autres produits étant nuls. On voit que l'ensemble $\{e_1, e_2, e_3 - e_6, e_4, e_5\}$ est une base l'idéal $[L, L]$ donc $L \supsetneq [L, L]$ (cf. lemme 1.2.3). Notons que l'élément $(0, 1) = e_3 + e_6$ n'est pas dans $[L, L]$ (cf. démonstration du lemme 1.2.3). De plus, l'algèbre L n'est pas résoluble et elle n'est pas non plus nilpotente (cf. théorème 1.2.1). L'idéal $L^{(1)} = [L, L]$ est engendré par $\{e_1, e_2, e_3 - e_6, e_4, e_5\}$, $L^{(2)}$ est engendré par $\{e_1, e_2, e_3 - e_6, 2e_4, 2e_5\}$, $L^{(3)}$ est engendré par $\{e_1, e_2, 4(e_3 - e_6), 4e_4, 4e_5\}$, $L^{(4)}$ est engendré par $\{4e_1, 4e_2, 16(e_3 - e_6), 32e_4, 32e_5\}$, etc. Ainsi, en tant que $\mathbf{Z}$ -modules libres, les idéaux $L^{(n)}$, $n \geq 1$, sont de rang 5 mais $L^{(n+1)} \subsetneq L^{(n)}$ pour tout $n \geq 1$. On observe que pour tout entier $n \geq 1$, $L^{(n+1)} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} = L^{(n)} \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$.

1.3. Le Théorème Principal

On sait que l'algèbre de Lie des dérivations $\text{Der}_K(A)$ de la K -algèbre gamétique $A = G(n+1, 2m)$ a dimension $n(n+1)$ (cf. [2, théorème 4]) et nous montrerons, par la suite, que ces $n(n+1)$ paramètres proviennent des dérivations calculées sur les idempotents de la base naturelle de l'algèbre $G(n+1, 2m)$. Ainsi, nous démontrerons le théorème suivant:

THÉORÈME 1.3.1. *Soient K un corps commutatif et $A = G(n+1, 2m)$ la K -algèbre gamétique d'une population $2m$ -ploïde avec $n+1$ allèles. Il existe alors un isomorphisme d'algèbres de Lie $\widetilde{\text{Der}_K(A)} \xrightarrow{\text{s.d.}} K^n \times M_n(K)$.*

La démonstration de ce théorème résulte d'une série de résultats préliminaires que nous démontrerons préalablement. Les notations étant celles du lemme 1.1.2, on a:

LEMME 1.3.2. *Quelles que soient les suites $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ et $(l_0, l_1, \dots, l_n)$ d'entiers positifs vérifiant $\sum_{k=0}^n i_k = m$ et $\sum_{k=0}^n l_k = m$, on a*

$$\begin{aligned} & \sum_{j_0 + \dots + j_n = m} \alpha_{0, \dots, m, \dots, 0; j_0, \dots, j_n} \binom{i_0 + j_0}{l_0} \dots \binom{i_n + j_n}{l_n} \\ & + \sum_{j_0 + \dots + j_n = m} \alpha_{i_0, \dots, i_n; j_0, \dots, j_n} \binom{j_0}{l_0} \dots \binom{j_k + m}{l_k} \dots \binom{j_n}{l_n} = 0 \\ & (k = 0, 1, \dots, n). \end{aligned}$$

En effet, pour toute dérivation d de $A = G(n+1, 2m)$, on peut écrire

$$d(X_0^{i_0} \cdots X_n^{i_n}) = \sum_{j_0 + \cdots + j_n = m} \alpha_{i_0, \dots, i_n; j_0, \dots, j_n} X_0^{j_0} \cdots X_n^{j_n}$$

et

$$d(X_k^m) = \sum_{\substack{j_0 + \cdots + j_n = m \\ j_k \neq m}} \alpha_{0, \dots, m, \dots, 0; j_0, \dots, j_n} (X_0^{j_0} \cdots X_n^{j_n} - X_k^m) \quad (0 \leq k \leq n),$$

où dans le multi-indice de $\alpha_{0, \dots, m, \dots, 0; j_0, \dots, j_n}$ le m occupe la k -ième position. En dérivant la formule

$$\begin{aligned} X_k^m (X_0^{i_0} \cdots X_n^{i_n}) \\ = \binom{2m}{m}^{-1} \sum_{l_0 + \cdots + l_n = m} \binom{i_0}{l_0} \cdots \binom{i_k + m}{l_k} \cdots \binom{i_n}{l_n} X_0^{l_0} \cdots X_n^{l_n} \end{aligned}$$

et en identifiant les coefficients de $X_0^{l_0} \cdots X_n^{l_n}$, on obtient le résultat voulu.

Ce résultat montre que les coefficients $\alpha_{i_0, \dots, i_n; j_0, \dots, j_n}$ peuvent être calculés en fonction des coefficients $\alpha_{0, \dots, m, \dots, 0; j_0, \dots, j_n}$ des dérivations calculées sur les idempotents de la base de l'algèbre A moyennant un choix convenable des entiers $l_0, \dots, l_n$. Ainsi, par exemple, si l'on fait $l_0 = m$ et $l_1 = \cdots = l_n = 0$, on a

$$\alpha_{i_0, \dots, i_n; m, 0, \dots, 0} = - \sum_{j_0 + \cdots + j_n = m} \alpha_{0, \dots, m, \dots, 0; j_0, \dots, j_n}$$

où $i_0 + j_0 = m$.

LEMME 1.3.3. *Pour toute dérivation d de A ,*

$$d(X_k^m) = \sum_{\substack{j_0 + \cdots + j_n = m \\ j_k \neq m}} \alpha_{0, \dots, m, \dots, 0; j_0, \dots, j_n} (X_0^{j_0} \cdots X_n^{j_n} - X_k^m),$$

on a

$$d(X_k^m) = \sum_{\substack{j_0 + \dots + j_n = m \\ j_k = m-1}} \alpha_{0, \dots, m, \dots, 0; j_0, \dots, j_n} (X_0^{j_0} \dots X_n^{j_n} - X_k^m)$$

et $\alpha_{0, \dots, m, \dots, 0; j_0, \dots, j_n} = 0$ pour toute suite $(j_0, \dots, j_n)$ d'entiers positifs vérifiant $j_0 + \dots + j_n = m$ et $j_k \neq m-1$.

Pour toute dérivation d de A et pour tout entier k , $0 \leq k \leq n$, écrivons

$$d(X_0^{i_0} \dots X_n^{i_n}) = \sum_{j_0 + \dots + j_n = m} \alpha_{i_0, \dots, i_n; j_0, \dots, j_n} X_0^{j_0} \dots X_n^{j_n}$$

et

$$d(X_k^m) = \sum_{j_0 + \dots + j_n = m} \alpha_{0, \dots, m, \dots, 0; j_0, \dots, j_n} X_0^{j_0} \dots X_n^{j_n}.$$

Si l'on dérive la formule $X_k^m X_k^m = X_k^m$ on a

$$\begin{aligned} & \alpha_{0, \dots, m, \dots, 0; l_0, \dots, l_n} \\ &= \frac{2}{\binom{2m}{m} - 2 \binom{m+l_k}{l_k}} \\ & \times \sum_{\substack{j_0 + \dots + j_n = m \\ j \neq l}} \alpha_{0, \dots, m, \dots, 0; j_0, \dots, j_n} \binom{j_0}{l_0} \dots \binom{j_k + m}{l_k} \dots \binom{j_n}{l_n} \end{aligned}$$

pour toute suite $(l_0, \dots, l_n)$ d'entiers positifs telle que $l_0 + \dots + l_n = m$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} d(X_k^m) &= \sum_{\substack{j_0 + \dots + j_n = m \\ j \neq l}} \alpha_{0, \dots, m, \dots, 0; j_0, \dots, j_n} \\ & \times \left(X_0^{j_0} \dots X_n^{j_n} + \frac{2 \binom{j_0}{l_0} \dots \binom{j_k + m}{l_k} \dots \binom{j_n}{l_n}}{\binom{2m}{m} - 2 \binom{m+l_k}{m}} X_0^{l_0} \dots X_n^{l_n} \right) \end{aligned}$$

et si l'on pose $l_0 = \dots = l_{k-1} = l_{k+1} = \dots = l_n = 0$ et $l_k = m$, on a

$$d(X_k^m) = \sum_{\substack{j_0 + \dots + j_n = m \\ j_k \neq m}} \alpha_{0, \dots, m, \dots, 0; j_0, \dots, j_n} \\ \times \left[X_0^{j_0} \dots X_n^{j_n} - 2 \binom{2m}{m}^{-1} \binom{j_k + m}{m} X_k^m \right].$$

Mais étant donné que l'on a aussi

$$d(X_k^m) = \sum_{\substack{j_0 + \dots + j_n = m \\ j_k \neq m}} \alpha_{0, \dots, m, \dots, 0; j_0, \dots, j_n} (X_0^{j_0} \dots X_n^{j_n} - X_k^m),$$

nécessairement on a

$$2 \binom{2m}{m}^{-1} \binom{j_k + m}{m} = 1,$$

d'où $j_k = m - 1$ (cf. lemme 1.3.4). Ceci nous permet d'écrire la formule

$$d(X_k^m) = \sum_{\substack{j_0 + \dots + j_n = m \\ j_k = m - 1}} \alpha_{0, \dots, m, \dots, 0; j_0, \dots, j_n} (X_0^{j_0} \dots X_n^{j_n} - X_k^m) \\ (k = 0, 1, \dots, n).$$

Il en résulte aussi que $\alpha_{0, \dots, m, \dots, 0; j_0, \dots, j_n} = 0$ pour toute suite $(j_0, \dots, j_n)$ d'entiers positifs vérifiant $j_0 + \dots + j_n = m$ et $j_k \neq m - 1$ ($k = 0, 1, \dots, n$). Le lemme suivant achève la démonstration du lemme ci-dessus:

LEMME 1.3.4. *Soit $m \geq 1$ un nombre entier. L'unique solution entière de l'équation*

$$2 \binom{x + m}{m} = \binom{2m}{m}$$

est $x = m - 1$.

On remarque, tout d'abord, que si une telle solution existe elle vérifie $0 \leq x \leq m - 1$. Supposons que $x \leq m - 2$. On a alors $x + m \leq 2(m - 1)$,

$x + m - 1 \leq 2m - 3, \dots, x + 1 \leq m - 1$ donc

$$\begin{aligned} 2 \binom{x+m}{m} &= \frac{2(x+m)(x+m-1) \cdots (x+1)}{m!} \\ &\leq \frac{2(2m-2)(2m-3) \cdots (m-1)}{m!} = \frac{m-1}{2m-1} \binom{2m}{m} < \binom{2m}{m}, \end{aligned}$$

car $m \geq 1$. Ceci nous dit que l'unique solution possible est $x = m - 1$.

Notons maintenant $\alpha_{kp} = \alpha_{0, \dots, m, \dots, 0; j_0, \dots, j_n}$ où m figure à la k -ième place dans le premier multi-indice et si $j_0 + \dots + j_n = m$ avec $j_k = m - 1$, alors 1 figure à la p -ième place dans le second multi-indice avec $p \neq k$. On peut donc écrire

$$d(X_k^m) = \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq k}}^n \alpha_{kp} (X_p X_k^{m-1} - X_k^m) \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Ceci nous permet de définir une application K -linéaire

$$\varphi: \text{Der}_K(G(n+1, 2m)) \rightarrow K^n \underset{\text{s.d.}}{\times} M_n(K)$$

par $d \mapsto ((\alpha_{01}, \dots, \alpha_{0n}), (\alpha_{kp})_{1 \leq k \leq n, 0 \leq p \leq n, p \neq k})$ et cette application est un isomorphisme de K -espaces vectoriels. Pour achever la démonstration du théorème 1.3.1, il suffira de montrer que φ est un morphisme d'algèbres de Lie, i.e., que quelles que soient les dérivations d et d' de $G(n+1, 2m)$, on a $\varphi([d, d']) = [\varphi(d), \varphi(d')]$. En effet, si

$$d'(X_k^m) = \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq k}}^n \alpha'_{kp} (X_p X_k^{m-1} - X_k^m) \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

on a

$$[d, d'](X_k^m) = \sum_{\substack{p=0 \\ p \neq k}}^n (\alpha'_{kp} d - \alpha_{kp} d')(X_p X_k^{m-1} - X_k^m) \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

et l'assertion ci-dessus s'ensuit.

NOTE 1.3.5. On peut donner, du théorème 1.3.1, une nouvelle démonstration, plus courte et intrinsèque, qui a toutefois le défaut de ne pas mettre en évidence la dimension de l'algèbre des dérivations. En effet, si K est un anneau commutatif à élément unité et (A, ω) une K -algèbre pondérée commutative, on choisit un élément e dans K tel que $\omega(e) = 1$ et on considère la décomposition de A en somme directe de K -modules $A = Ke \oplus \text{Ker}(\omega)$. L'application K -linéaire $\text{Der}_K(A) \rightarrow \text{Ker}(\omega) \times \text{End}_K(\text{Ker}(\omega))$ définie par $d \mapsto (d(e), d|_{\text{Ker}(\omega)})$ est un morphisme injectif d'algèbres de Lie, où l'on suppose, évidemment, que $\omega \circ d = 0$ pour toute dérivation d de A et que la pondération ω soit unique. Si l'on applique ce résultat au cas où K est un corps commutatif de caractéristique zéro et (A, ω) est une K -algèbre gamétique, un argument de dimension nous fournit le théorème 1.3.1.

1.4. Dérivations Intérieures

Soient K un corps commutatif, A une K -algèbre et $L_K(A)$ l'algèbre de Lie des multiplications de A (cf. [11, chapitre 2, §3]). On dira qu'une dérivation d de A est *intérieure* si d est dans $L_K(A)$, c'est-à-dire, si $\text{Derint}_K(A)$ désigne l'ensemble des dérivations intérieures de A , alors $\text{Derint}_K(A) = \text{Der}_K(A) \cap L_K(A)$. D'autre part, une application K -linéaire $d: A \rightarrow A$ est une K -dérivation de A si et seulement si $[d, R_x] = R_{d(x)}$ pour tout x dans A ou, ce qui est équivalent, si et seulement si $[d, L_x] = L_{d(x)}$ pour tout x dans A , où R_x et L_x désignent, respectivement, la multiplication à droite et à gauche de A définie par l'élément x de A . Ceci nous conduit au résultat suivant (cf. [11, chapitre 2, §3]):

LEMME 1.4.1. Soient K un corps commutatif et A une K -algèbre. Alors, le K -espace vectoriel $\text{Derint}_K(A)$ est un idéal de l'algèbre de Lie $\text{Der}_K(A)$.

On peut alors, en suivant ce que l'on fait dans le cas des algèbres associatives, définir le *premier groupe de cohomologie de Hochschild* $H^1(A)$ d'une algèbre A , non nécessairement associative, à coefficients dans A , en posant $H^1(A) = \text{Der}_K(A) / \text{Derint}_K(A)$. Il est clair que $H^1(A)$ est encore, par passage au quotient, muni d'une structure d'algèbre de Lie sur K . Le résultat suivant, dû à N. Jacobson, est bien connu (cf. [11, chapitre 2, §3, théorème 2.5]):

THÉORÈME ET DÉFINITION 1.4.2. Soient K un corps commutatif de caractéristique zéro et A une K -algèbre de dimension finie munie d'un élément unité à droite ou à gauche. Si A est une algèbre semi-simple, c'est-à-dire, la somme directe finie d'idéaux simples, alors $H^1(A) = 0$, ou encore, toute dérivation de A est intérieure.

Notons que les algèbres gamétiques sont des algèbres non associatives sans élément unité donc le théorème ci-dessus ne s'applique pas dans la recherche des dérivations intérieures de ces algèbres. Néanmoins, les dérivations intérieures des algèbres gamétiques peuvent être caractérisées et ceci, au moyen d'un calcul direct.

En effet, soient K un corps commutatif de caractéristique zéro, $G(n+1, 2m)$ la K -algèbre gamétique d'une population $2m$ -ploïde avec $n+1$ allèles et $\{X_0^{i_0} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n} \mid \sum_{k=0}^n i_k = m\}$ la base canonique de $G(n+1, 2m)$ sur K . Cela veut dire que la table de multiplication de $G(n+1, 2m)$ relativement à cette base s'écrit

$$\begin{aligned} & (X_0^{i_0} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}) (X_0^{j_0} X_1^{j_1} \cdots X_n^{j_n}) \\ &= \binom{2m}{m}^{-1} \binom{i_0 + j_0}{m} X_0^{i_0 + j_0 - n} X_1^{i_1 + j_1} \cdots X_n^{i_n + j_n} \end{aligned}$$

quelles que soient les suites d'indices $(i_0, i_1, \dots, i_n)$ et $(j_0, j_1, \dots, j_n)$ telles que $\sum_{k=0}^n i_k = m$ et $\sum_{k=0}^n j_k = m$. Pour toute K -dérivation d de $G(n+1, 2m)$, on a

$$d(X_0^{i_0} X_1^{i_1} \cdots X_n^{i_n}) = \sum_{j_0 + \cdots + j_n = m} \alpha_{i_0, \dots, i_n; j_0, \dots, j_n} X_0^{j_0} X_1^{j_1} \cdots X_n^{j_n},$$

où les $\alpha_{i_0, \dots, i_n; j_0, \dots, j_n}$ sont dans K . Or,

$$d(X_0^m) = \sum_{j_0 + \cdots + j_n = m} \alpha_{m, 0, \dots, 0; j_0, \dots, j_n} X_0^{j_0} X_1^{j_1} \cdots X_n^{j_n}$$

et comme X_0^m est un idempotent de $G(n+1, 2m)$, on conclut que

$$\begin{aligned} d(X_0^m) &= \alpha_{m, 0, \dots, 0; m-1, 1, 0, \dots, 0} X_0^{m-1} X_1 \\ &\quad + \alpha_{m, 0, \dots, 0; m-1, 0, 1, \dots, 0} X_0^{m-1} X_2 + \cdots \\ &\quad + \alpha_{m, 0, \dots, 0; m-1, 0, \dots, 0, 1} X_0^{m-1} X_n. \end{aligned}$$

Ceci nous conduit à observer que la matrice de toute dérivation de $G(n+1, 2m)$ est triangulaire inférieure avec zéro comme premier élément de la diagonale principale, les autres éléments étant des $\alpha_{i_0, \dots, i_n; j_0, \dots, j_n}$ avec $(i_0, \dots, i_n) = (j_0, \dots, j_n)$. Or, pour que une dérivation d de $G(n+1, 2m)$ soit intérieure, il faut et il suffit que sa matrice soit une combinaison linéaire de la

matrice diagonale $(L_{X_0^m})$ de la multiplication par X_0^m et des matrices e_{ij} dont l'élément dans la position (i, j) est 1, tous les autres étant nuls

$$\left[i, j = 1, \dots, \binom{n+n}{m}; \quad i > j \right].$$

Donc, d est intérieure, si et seulement si $\alpha_{i_0, \dots, i_n; j_0, \dots, j_n} = 0$ pour $(i_0, \dots, i_n) = (j_0, \dots, j_n)$.

Ceci nous conduit à des conséquences intéressantes. On sait (cf. théorème 1.3.1) qu'il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie $\text{Der}_K(G(n+1, 2m)) \xrightarrow{\text{s.d.}} K^n \times M_n(K)$, $d \mapsto ((\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_{ij}))$ donc d est une dérivation intérieure de $G(n+1, 2m)$ si et seulement si $\beta_{ji} = \alpha_i$ ($i = 1, \dots, n$) et pour tout j , $1 \leq j \leq n$. Ainsi, $\text{Derint}_K(G(n+1, 2m))$ est une algèbre de Lie de dimension n dont une base est donnée par $\{u_j + \sum_{k=1}^n e_{kj}\}_{1 \leq j \leq n}$, où $\{u_j\}_{1 \leq j \leq n}$ est la base canonique du K -espace vectoriel K^n . On est ainsi conduit au théorème suivant:

THÉORÈME 1.4.3. *Soient K un corps commutatif de caractéristique zéro et $A = G(n+1, 2m)$ la K -algèbre gamétique d'une population $2m$ -ploïde avec $n+1$ allèles. Considérons l'isomorphisme d'algèbres de Lie*

$$\text{Der}(A) \xrightarrow{\text{s.d.}} K^n \times M_n(K), \quad d \mapsto ((\alpha_1, \dots, \alpha_n), (\beta_{kj})_{1 \leq k, j \leq n}).$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que une dérivation d soit intérieure est que $\alpha_j = \beta_{kj}$ ($k, j = 1, \dots, n$). De plus, l'algèbre de Lie $\text{Derint}_K(A)$ a dimension n et une base en est $\{u_j + \sum_{k=1}^n e_{kj}\}_{1 \leq j \leq n}$.

Soient K un corps commutatif de caractéristique zéro, $G(2, 2m)$ la K -algèbre gamétique d'une population $2m$ -ploïde avec deux allèles et $\{e_0, e_1, \dots, e_m\}$ la base naturelle de $G(2, 2m)$ sur K , i.e., $e_k = X_0^{m-k} X_1^k$ ($k = 0, 1, \dots, m$), les notations étant celles du paragraphe 1.1. On sait (cf. [8, lemme 2.1]) que pour chaque dérivation de $G(2, 2m)$, il existe des scalaires α et β dans K , uniques, tels que

$$d(e_k) = \frac{k}{m} \beta (e_{k-1} - e_k) + \frac{m-k}{m} \alpha (e_k - e_{k+1}) \quad (k = 0, 1, \dots, m).$$

COROLLAIRE 1.4.4. *Une condition nécessaire et suffisante pour que une dérivation d de la K -algèbre $G(2, 2m)$ soit intérieure est que $\alpha = \beta$, où α et β sont les scalaires attachés à d .*

COROLLAIRE 1.4.5. *Soient K un corps commutatif de caractéristique zéro et $G(n+1, 2m)$ la K -algèbre gamétique d'une population $2m$ -ploïde avec $n+1$ allèles. Alors $H^1(G(n+1, 2m))$ est une algèbre de Lie de dimension n^2 .*

Dans le cas particulier où $n = 1$, $H^1(G(2, 2m))$ est la K -algèbre de Lie abélienne de dimension 1 donc $H^1(G(2, 2m)) \approx K$, isomorphisme d'algèbres de Lie.

2. DERIVATIONS ET DUPLICATION

2.1. Le Morphisme $\text{Der}_K(A) \rightarrow \text{Der}_K(D(A))$

Soient K un anneau commutatif à élément unité, A une K -algèbre et considérons sur le K -module $A \otimes_K A$ la structure d'algèbre définie par $(x \otimes y)(x' \otimes y') = (xy) \otimes (x'y')$ pour x, y, x' et y' parcourant A . Désignons maintenant par $D(A)$ la seconde puissance symétrique du K -module A et par $A \otimes_K A \rightarrow D(A)$, $x \otimes y \mapsto x \cdot y$ la surjection K -linéaire canonique. La multiplication $(x \cdot y)(x' \cdot y') = (xy) \cdot (x'y')$, pour x, y, x' et y' parcourant A , définit sur $D(A)$ une structure d'algèbre commutative sur K et la surjection $A \otimes_K A \rightarrow D(A)$, $x \otimes y \mapsto x \cdot y$ devient ainsi un morphisme de K -algèbres. On dira que $D(A)$ est l'*algèbre dupliquée* (commutative) de A et que $A \otimes_K A$ est l'*algèbre dupliquée non commutative* de A . Dans un contexte d'algèbres génétiques, il s'agira toujours de la duplication commutative, c'est-à-dire, de l'algèbre $D(A)$ qui nous occupera.

Pour toute dérivation d de A , considérons les applications K -linéaires $\varphi(d): D(A) \rightarrow D(A)$ et $\psi(d): A \otimes_K A \rightarrow A \otimes_K A$ définies par $\varphi(d)(x \cdot y) = d(x) \cdot y + x \cdot d(y)$ et $\psi(d)(x \otimes y) = d(x) \otimes y + x \otimes d(y)$ pour x et y parcourant A . Il est facile de voir que pour toute dérivation d de A , $\varphi(d)$ est une dérivation de $D(A)$ et $\psi(d)$ est une dérivation de $A \otimes_K A$. De plus, les applications K -linéaires $\varphi: \text{Der}_K(A) \rightarrow \text{Der}_K(D(A))$ et $\psi: \text{Der}_K(A) \rightarrow \text{Der}_K(A \otimes_K A)$ sont des morphismes d'algèbres de Lie.

THÉORÈME 2.1.1. *Soient K un anneau commutatif à élément unité et A une K -algèbre commutative. Si A est un K -module plat et si l'homothétie définie par 2 dans K est injective, le morphisme d'algèbres de Lie $\varphi: \text{Der}_K(A) \rightarrow \text{Der}_K(D(A))$ est injectif. De plus, si φ est injectif, il en est de même du morphisme $\psi: \text{Der}_K(A) \rightarrow \text{Der}_K(A \otimes_K A)$.*

Notons que pour toute dérivation d de A ,

$$\psi(d)(x \otimes y - y \otimes x) = [d(x) \otimes y - y \otimes d(x)] + [x \otimes d(y) - d(y) \otimes x],$$

quels que soient x et y dans A donc, par passage aux quotients, on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A \otimes_K A & \xrightarrow{\psi(d)} & A \otimes_K A \\ c \downarrow & & \downarrow c \\ D(A) & \xrightarrow{\varphi(d)} & D(A), \end{array}$$

où la flèche verticale est le morphisme canonique. L'injectivité de φ entraîne ici celle de ψ .

Montrons maintenant l'injectivité de φ . D'après le théorème de Lazard caractérisant les modules plats (cf. [7] ou [6, chapitre 3, §5, n° 3, théorème V.5]), on peut supposer que A soit un K -module libre de type fini. Supposons donc que A soit libre de base $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ sur K et soient $d: A \rightarrow A$ une dérivation de A et $d(e_i) = \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} e_j$ ($i = 0, 1, \dots, n$), où les α_{ij} sont dans K . Si $\varphi(d) = 0$ on a $0 = \varphi(d)(e_i \cdot e_i) = 2e_i \cdot d(e_i) = 2 \sum_{j=0}^n \alpha_{ij} e_i \cdot e_j$ d'où $2\alpha_{ij} = 0$ soit $\alpha_{ij} = 0$ ($i, j = 0, 1, \dots, n$).

Cette démonstration de l'injectivité de φ dans le cas où K est un corps commutatif de caractéristique zéro est due à R. Costa [3, proposition 1]. Le théorème suivant est aussi bien connu [3, théorème 3]:

THÉORÈME 2.1.2. *Soient K un corps commutatif de caractéristique zéro et $G(n+1, 2m)$ la K -algèbre gamétique d'une population $2m$ -ploïde avec $n+1$ allèles. Le morphisme d'algèbres de Lie $\varphi: \text{Der}_K(G(n+1, 2m)) \rightarrow \text{Der}_K(Z(n+1, 2m))$ est un isomorphisme.*

Rappelons ici que l'algèbre zygotique $Z(n+1, 2m)$ d'une population $2m$ -ploïde avec $n+1$ allèles est l'algèbre dupliquée de $G(n+1, 2m)$.

Soient maintenant K un anneau commutatif à élément unité, P un K -module et $d: P \rightarrow K$ une application K -linéaire surjective laquelle se prolonge en une K -dérivation de degré -1 de l'algèbre symétrique $S_K(P)$, notée encore d . Si $m \geq 1$ est un nombre entier et K un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel, considérons l'algèbre gamétique $S_K^m(P, d)$ du K -module (P, d) (cf. [10]). On sait que si P est libre de rang $n+1$ et d une dérivation convenable, on obtient l'algèbre gamétique classique $G(n+1, 2m)$. Le théorème 2.1.2 nous donne, par localisation et globalisation, le théorème suivant:

THÉORÈME 2.1.3. *Soient K un anneau commutatif à élément unité, P un K -module, $d: P \rightarrow K$ une application K -linéaire surjective et $m \geq 1$ un nom-*

bre entier. Supposons que K soit un $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel et que K soit un anneau régulier au sens de Von Neumann. Si P est un K -module projectif de type fini, le morphisme d'algèbres de Lie $\text{Der}_K(S_K^m(P, d)) \rightarrow \text{Der}_K(D(S_K^m(P, d)))$ est un isomorphisme.

Vu le théorème 5.5 de [10], ceci nous permet de calculer l'algèbre de Lie des dérivations de $D(S_K^m(P, d))$. Plus précisément, on a le corollaire suivant:

COROLLAIRE 2.1.4. Soient K un anneau commutatif à élément unité, P un K -module, $d: P \rightarrow K$ une application K -linéaire surjective, $m \geq 1$ un nombre entier et supposons que K soit un $\mathbf{Q}$ -espace vectoriel. Si K est un anneau régulier au sens de Von Neumann et si P est un K -module projectif de type fini, il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie $\text{Der}_K(D(S_K^m(P, d))) \approx \text{Ker}(d) \times \text{gl}(\text{Ker}(d))$, où $\text{gl}(\text{Ker}(d))$ désigne l'algèbre de Lie du groupe s.d. linéaire de $\text{Ker}(d)$.

Dans le cas où K est un corps de caractéristique zéro et P un K -espace vectoriel de dimension $n+1$, le corollaire ci-dessus se traduit de la façon suivante:

COROLLAIRE 2.1.5. Soient K un corps commutatif de caractéristique zéro et $Z(n+1, 2m)$ l'algèbre zygotique d'une population $2m$ -ploïde avec $n+1$ allèles. Il existe un isomorphisme d'algèbres de Lie

$$\text{Der}_K(Z(n+1, 2m)) \approx K^n \times_{\text{s.d.}} M_n(K).$$

2.2. Duplication et Idempotents

On se pose ici le problème de savoir si, dans le processus de duplication d'une algèbre, le nombre d'idempotents reste invariant. Soient donc K un anneau commutatif à élément unité, A une K -algèbre et $D(A)$ (resp. $A \otimes_K A$) la dupliquée (resp. dupliquée non commutative) de A . Notons encore $g: D(A) \rightarrow A$ (resp. $g: A \otimes_K A \rightarrow A$) le morphisme des algèbres défini par $\sum_i x_i \cdot y_i \mapsto \sum_i x_i y_i$ (resp. $\sum_i x_i \otimes y_i \mapsto \sum_i x_i y_i$) et $\text{Ip}(A)$ l'ensemble des idempotents de l'algèbre A .

THÉORÈME 2.2.1. Soient K un anneau commutatif à élément unité et A une K -algèbre. Le morphisme de K -algèbres $g: D(A) \rightarrow A$ induit une bijection d'ensembles $g: \text{Ip}(D(A)) \rightarrow \text{Ip}(A)$.

Puisque $g: D(A) \rightarrow A$ est un morphisme de K -algèbres, il induit une application d'ensembles $g: \text{Ip}(D(A)) \rightarrow \text{Ip}(A)$. Considérons maintenant l'application quadratique $f: A \rightarrow D(A)$ définie par $x \mapsto x \cdot x$. Il est clair que pour

tout idempotent x de A , $f(x)$ est un idempotent de $D(A)$ d'où l'application d'ensembles $f: \text{Ip}(A) \rightarrow \text{Ip}(D(A))$. Il est maintenant facile de montrer que $f: \text{Ip}(A) \rightarrow \text{Ip}(D(A))$ et $g: \text{Ip}(D(A)) \rightarrow \text{Ip}(A)$ sont des bijections réciproques.

COROLLAIRE 2.2.2. *Soit K un corps commutatif de caractéristique zéro. Quels que soient les entiers $m, n \geq 1$, on a une bijection d'ensembles $\text{Ip}(G(n+1, 2m)) \xrightarrow{\sim} \text{Ip}(Z(n+1, 2m))$.*

EXEMPLE 2.2.3. Soit K un corps commutatif de caractéristique différente de 2 et considérons l'algèbre gamétique $G(n+1, 2)$ de l'héritage mendélien simple dont la table de multiplication relative à la base naturelle $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$ s'écrit $e_i e_j = \frac{1}{2}(e_i + e_j)$ ($i, j = 0, 1, \dots, n$). Les idempotents non nuls de $G(n+1, 2)$ s'écrivent $\sum_{i=0}^n \alpha_i e_i$ avec $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$ donc, d'après le théorème 2.2.1, les idempotents non nuls de $Z(n+1, 2)$ s'écrivent $\sum_{0 \leq i < j < n} \alpha_{ij} e_i \cdot e_j$ avec $\sum_{0 \leq i < j < n} \alpha_{ij} = 1$.

Le résultat suivant est encore vérifié et sa démonstration est analogue à celle du théorème 2.2.1:

THÉORÈME 2.2.4. *Soient K un anneau commutatif à élément unité, A une K -algèbre et $A \otimes_K A$ sa dupliquée non commutative. Le morphisme de K -algèbres $g: A \otimes_K A \rightarrow A$ induit une bijection d'ensembles $\text{Ip}(A \otimes_K A) \xrightarrow{\sim} \text{Ip}(A)$.*

Les théorèmes ci-dessus nous permettent de tirer les conséquences suivantes:

COROLLAIRE 2.2.5. *Soient K un anneau commutatif à élément unité, A une K -algèbre, $A \otimes_K A$ sa dupliquée non commutative et $D(A)$ sa dupliquée. Le morphisme canonique de K -algèbres $A \otimes_K A \rightarrow D(A)$ induit une bijection d'ensembles $\text{Ip}(A \otimes_K A) \xrightarrow{\sim} \text{Ip}(D(A))$.*

COROLLAIRE 2.2.6. *Soient K un anneau commutatif à élément unité, P un K -module, $d: P \rightarrow K$ une application K -linéaire surjective, $m \geq 1$ un nombre entier et supposons que K soit un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel. Il existe alors une bijection d'ensembles*

$$\text{Ip}(S_K^m(P, d)) \xrightarrow{\sim} \text{Ip}(D(S_K^m(P, d))).$$

On sait déjà (cf. [10, théorème 3.1]) que si K est un anneau connexe, c'est-à-dire, ses seuls idempotents sont 0 et 1, les idempotents de la K -algèbre

gamétique $S_K^m(P, d)$ s'écrivent t^m , puissance m -ième de t dans l'algèbre symétrique $S_K(P)$, avec t dans P et $d(t) = 1$. On a alors le résultat suivant:

COROLLAIRE 2.2.7. *Soient K un anneau commutatif à élément unité et connexe, P un K -module, $m \geq 1$ un nombre entier, $d: P \rightarrow K$ une application K -linéaire surjective et supposons que K soit un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel. Les idempotents de l'algèbre zygotique $D(S_K^m(P, d))$ sont de la forme $t^m \cdot t^m$, où t^m est la m -ième puissance de t dans $S_K(P)$ et t est un élément de P tel que $d(t) = 1$.*

NOTE FINALE. Le théorème 2.3 de [9] est vrai mais sa démonstration contient une lacune. Nous donnons ici la démonstration correcte.

THÉORÈME. *Soient K un corps commutatif et $n \geq 1$ un nombre entier. L'algèbre de Lie $A_n = K^{n(n+1)}$ n'est résoluble que si $n = 1$ ou si $n = 2$ et la caractéristique de K est 2. Dans tous les cas elle n'est jamais nilpotente ni semi-simple.*

En effet, si $n = 1$ et si $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ est la base canonique du K -espace vectoriel K^2 , la table de multiplication de l'algèbre de Lie $A_1 = K^2$ relativement à cette base s'écrit:

$$\begin{array}{ccc} & e_1 & e_2 \\ e_1 & 0 & e_1 + e_2 \\ e_2 & -(e_1 + e_2) & 0 \end{array}$$

Donc, l'idéal $A_1^{(1)} = [A_1, A_1]$ est engendré par $e_1 + e_2$ et $A_1^{(2)} = [A_1^{(1)}, A_1^{(1)}] = 0$, ce qui montre que l'algèbre A_1 est résoluble. Par contre, l'idéal A_1^1 est engendré par $e_1 + e_2$ ainsi que l'idéal $A_1^2 = [A_1^1, A_1]$. Ceci nous montre que $A_1 \supsetneq A_1^1 = A_1^2 = \dots \neq 0$, i.e., l'algèbre de Lie A_1 n'est pas nilpotente.

Supposons maintenant que $n = 2$ et montrons le théorème pour l'algèbre $A_2 = K^6$. Si $\{e_1, \dots, e_6\}$ désigne la base canonique du K -espace vectoriel K^6 ,

TABLE 1

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6
e_1	0	$-e_2$	e_3	0	$e_1 + e_5$	e_2
e_2	e_2	0	$-e_1 + e_4$	$-e_2$	$e_1 + e_6$	$-e_2$
e_3	$-e_3$	$e_1 - e_4$	0	e_3	e_3	$e_4 + e_5$
e_4	0	e_2	$-e_3$	0	e_3	$e_4 + e_6$
e_5	$-e_1 - e_5$	$-e_1 - e_6$	$-e_3$	$-e_3$	0	$-e_5 + e_6$
e_6	$-e_2$	e_2	$-e_4 - e_5$	$-e_4 - e_6$	$e_5 - e_6$	0

TABLE 2

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}	e_{11}	e_{12}
e_1	0	$-e_2$	$-e_3$	e_4	0	0	e_7	0	0	$e_1 + e_{10}$	e_2	e_3
e_2	e_2	0	0	e_8	$-e_2$	$-e_3$	e_8	0	0	$e_1 + e_{11}$	e_2	e_3
e_3	e_3	0	0	e_6	0	0	$e_9 - e_1$	$-e_2$	$-e_3$	$e_1 + e_{12}$	e_2	e_3
e_4	$-e_4$	$-e_8$	$-e_6$	0	e_4	0	0	e_7	0	e_4	$e_5 + e_{10}$	e_6
e_5	0	e_2	0	$-e_4$	0	$-e_6$	0	e_8	0	e_4	$e_5 + e_{11}$	e_8
e_6	0	e_3	0	0	e_6	0	$-e_4$	$e_9 - e_5$	$-e_6$	e_4	$e_5 + e_{12}$	e_6
e_7	$-e_7$	$-e_8$	$e_1 - e_8$	0	0	e_4	0	0	e_7	e_7	e_8	$e_9 + e_{10}$
e_8	0	0	e_2	$-e_7$	$-e_8$	$e_5 - e_9$	0	0	e_8	e_7	e_8	$e_9 + e_{11}$
e_9	0	0	e_3	0	0	e_6	$-e_7$	$-e_8$	0	e_7	e_8	$e_9 + e_{12}$
e_{10}	$-e_1 - e_{10}$	$-e_1 - e_{11}$	$-e_1 - e_{12}$	$-e_4$	$-e_4$	$-e_4$	$-e_7$	$-e_7$	$-e_7$	0	$e_{11} - e_{10}$	$e_{12} - e_{10}$
e_{11}	$-e_2$	$-e_2$	$-e_2$	$-e_5 - e_{10}$	$-e_5 - e_{11}$	$-e_5 - e_{12}$	$-e_8$	$-e_8$	$-e_8$	$e_{10} - e_{11}$	0	$e_{12} - e_{11}$
e_{12}	$-e_3$	$-e_3$	$-e_3$	$-e_6$	$-e_6$	$-e_6$	$-e_9 - e_{10} - e_{11} - e_{12}$	$-e_9 - e_{11} - e_{12}$	$-e_9 - e_{12}$	$e_{10} - e_{12}$	$e_{11} - e_{12}$	0

la table de multiplication de l'algèbre de Lie $A_2 = K^6$ relativement à cette base s'écrit comme sur la table 1.

On voit que l'idéal $A_2^{(1)}$ est engendré par les vecteurs $e_1 - e_4$, $e_1 + e_5$, $e_1 + e_6$, e_2 , e_3 alors que $A_2^{(2)}$ est engendré par les vecteurs $e_1 - e_4$, $2(e_1 + e_5)$, $2(e_1 + e_6)$, $2e_2$, $2e_3$. Ceci nous dit que si la caractéristique de K est $\neq 2$, on a $A_2 \supsetneq A_2^{(1)} = A_2^{(2)} = \dots \neq 0$, i.e., l'algèbre de Lie $A_2 = K^6$ n'est pas résoluble. Mais si la caractéristique de K est 2, l'idéal $A_2^{(2)}$ est engendré par le vecteur $e_1 - e_4$ et $A_2^{(3)} = 0$, i.e., A_2 est résoluble.

Supposons que $n = 3$ et considérons l'algèbre $A_3 = K^{12}$. Si $\{e_1, \dots, e_{12}\}$ désigne la base canonique de A_3 sur K , la table de multiplication de A_3 relativement à la base donnée s'écrit comme sur la table 2. L'idéal $A_3^{(1)}$ est engendré par les vecteurs $e_1 - e_5$, $e_1 - e_9$, $e_1 + e_{10}$, $e_1 + e_{11}$, $e_1 + e_{12}$, e_2 , e_3 , e_4 , e_6 , e_7 , e_8 de même que l'idéal $A_3^{(2)}$. Donc $A_3 \supsetneq A_3^{(1)} = A_3^{(2)} = \dots \neq 0$, ce qui montre que A_3 n'est pas résoluble. L'existence de morphismes injectifs de K -algèbres de Lie $A_n \hookrightarrow A_{n+1}$ pour tout entier $n \geq 1$ nous montre que A_n n'est pas résoluble pour $n \geq 3$. De même, le fait que A_1 ne soit pas nilpotente entraîne que A_n ne l'est pas non plus pour $n \geq 1$. Finalement, le fait que $A_n \supsetneq A_n^1$ entraîne que A_n n'est pas semi-simple et ceci, pour tout entier $n \geq 1$ (cf. [5]).

BIBLIOGRAPHIE

- 1 M. T. Alcade, C. Burgueño, A. Labra et A. Micali, Sur les algèbres de Bernstein, *Proc. London Math. Soc.* (1987).
- 2 R. Costa, On the derivations of gametic algebras for polyploidy with multiple alleles, *Bol. Soc. Brasil. Mat.* 13:69-81 (1982).
- 3 R. Costa, On the derivation algebra of zygotic algebras for polyploidy with multiple alleles, *Bol. Soc. Brasil. Mat.* 14:63-80 (1983).
- 4 Ph. Holgate, Characterizations of genetic algebras, *J. London Math. Soc.* 6:169-174 (1972).
- 5 J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer, Berlin, 1972.
- 6 J. P. Lafon, *Les Formalismes Fondamentaux de l'Algèbre Commutative*, Hermann, Paris, 1974.
- 7 D. Lazard, Autour de la platitude, *Bull. Soc. Math. France* 97:81-128 (1969).
- 8 A. Micali, T. M. M. Campos, M. C. Costa e Silva, S. M. M. Ferreira et R. C. F. Costa, Dérivations dans les algèbres gamétiques, *Comm. Algebra* 12:239-243 (1984).
- 9 A. Micali, T. M. M. Campos, M. C. Costa e Silva et S. M. M. Ferreira, Dérivations dans les algèbres gamétiques II, *Linear Algebra Appl.* 64:175-181 (1985).
- 10 A. Micali et Ph. Revoy, Sur les algèbres gamétiques, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* 29:187-197 (1986).

- 11 R. D. Schafer, *An Introduction to Nonassociative Algebras*, Academic, New York, 1966.
- 12 A. Wörz-Busekros, *Algebras in Genetics*, Lecture Notes in Biomath. 36, Springer, Berlin, 1980.
- 13 N. Bourbaki, *Algèbre I*, Hermann, Paris, 1970, chapitres 1 à 3.

Received 19 December 1984; final manuscript accepted 3 May 1988