La Fuerza de Elección del Teorema de Hahn-Banach

Germán Andrés Enciso Ruiz

Tesis de Grado

Director: Xavier Caicedo Ferrer

Universidad de los Andes
Departamento de Matemáticas

Bogotá, 2 de agosto de 2000

Agradecimientos:

Quiero expresar mi agradecimiento a los profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad, en especial a mi asesor de tesis Xavier Caicedo, sin el cual este trabajo no hubiera sido posible, y a Jaime Lesmes y Ahmed Ould, quienes me dieron muchas veces su opinión y sus ideas para salir de caminos difíciles. A mi padre y madre por su apoyo incondicional, y a mis compañeros de estudio, en especial a Eliana Zoque y Elisa Vásquez por su interés en mi proyecto. A Laura y a todos mis amigos que de una u otra forma me acompañaron durante el pregrado e hicieron posible este escrito, entre otras cosas.

> "Macht die Definition, mit der man anfängt, keinen Sinn mehr, so soll man nicht fragen: Was ist es? sondern: Was ist vernünftig anzunehmen, damit es bedeutend bleibt?"
>
> Gauss, en una carta a Bessel

0.1 Introducción

En 1927 el matemático austríaco Hans Hahn demostró un teorema que hoy enunciaríamos como

Teorema 0.1 *Sea E un espacio de Banach, V un subespacio de E, y f un funcional lineal sobre V tal que $f(x) \leq \| x \|$, para todo $x \in V$. Entonces existe una extensión lineal F de f definida sobre E, tal que $F(x) \leq \| x \|$, para todo $x \in E$.*[1]

Mientras tanto, en Polonia, Stefan Banach llevaba a cabo una investigación sobre los espacios vectoriales normados completos (es decir precisamente lo que hoy conocemos como espacios de Banach), que llevaría a la publicación del tratado *Théorie des opérations linéaires* (Warsaw, 1932). En la página 28 de este tratado se demuestra una versión algo más estilizada del mismo resultado, al que en 1938 Bohnenblust y Sobczyk (habiéndolo extendido a espacios complejos) se referirían como 'Teorema de Hahn-Banach'. Se dice también que el matemático Edward Helly pudo haber obtenido las ideas esenciales del teorema antes que todos los demás, ver Hochstadt (1980).

El objetivo de este trabajo de tesis es estudiar el teorema de Hahn-Banach (HB) como sustituto del axioma de elección (AC) en el sistema axiomático de Zermelo-Fraenkel. Se sabe que HB es en este sentido más débil que AC, pero también que su demostración no es posible sin hacer uso de AC, es decir que involucra necesariamente un paso no constructivo; de esta forma HB permite demostrar algunos resultados cuyas demostraciones dependen usualmente de AC. Para entender el contenido de elección en HB se tratarán varios teoremas de diferente naturaleza, tanto conocidos como formulados por nosotros mismos, y se estudiará cuáles de estos implican o son implicados por HB en ausencia de AC. Si ambas cosas suceden se dirá que ambos teoremas son equivalentes. Se hará un énfasis especial en los resultados que constituyan formulaciones *explícitas* de elección, es decir que afirmen la existencia de una elección de elementos en una familia de conjuntos bajo ciertas condiciones; para esto se usará el lenguaje de las familias dirigidas e inversas de conjuntos. También se centrará la atención en teoremas que son formas debilitadas de resultados más conocidos, para ilustrar en cada caso de qué forma el contenido de elección a disposición incide en la fuerza de las afirmaciones. Tal vez el resultado mas importante de este trabajo fue haber encontrado un principio de elección en familias inversas de espacios vectoriales, equivalente a HB, que perseguimos durante todo el semestre y alrededor del cual gira la segunda mitad del capítulo principal.

Todos los teoremas enunciados se demuestran sin hacer uso de ningún tipo de elección, a no ser que se especifique lo contrario. Salvo por los rudimentos en teoría

[1] Hans Hahn, Über lineare Gleichungen in linearen Räumen", *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 157, 1927, pp. 214-229.

de conjuntos necesarios para entender el párrafo anterior, y algo de análisis funcional, para la comprensión de este texto sólo se necesita una formación general en matemáticas. Después de un capítulo de preliminares, en el capítulo 2 se presentan varios resultados equivalentes con el Teorema del Ideal Booleano Primo (IBP). Éstos se debilitan en el capítulo 3, formando teoremas equivalentes con el Teorema de Hahn-Banach; el lector podrá usar como guía la tabla de implicaciones en el apéndice. El capítulo 3 es original, así como la segunda parte del capítulo 2. El resto es expositivo, aunque una buena parte de los teoremas se demostraron a nuestra manera. Estamos particularmente orgullosos de la sección 3.4, que define un centro de masa para subconjuntos acotados de un espacio de Hilbert a los que se ha definido una cierta distribución de masa, y que termina con una elegante paradoja.

El último capítulo constituye una aplicación de HB en lo que tal vez sea la consecuencia más polémica del axioma de elección, la paradoja de Banach y Tarski. La elección de esa aplicación particular no es casual, finalmente todo este trabajo presupone una crítica acerca del axioma de elección, y cabe la pregunta sobre qué otro axioma podría servir para remplazarlo. Pues bien, si el criterio es la consistencia con la intuición, el capítulo 4 nos dice que el axioma de HB tampoco nos sirve. En cuanto a por qué dudar del axioma de elección, podemos decir que hay otros axiomas, como el de determinación, que también ofrecen un panorama matemático interesante, pero que son irreconciliables con el axioma de elección, de manera que hay que optar por el uno o por el otro. Tal vez exista un axioma más débil que el de elección que nos ayude a evitar esta fragmentación, y la forma de trabajo usada en este texto puede ser un primer paso para encontrarlo.

Índice General

0.1 Introducción 3

1 Preliminares **6**

1.1 El teorema de Hahn-Banach 6

1.2 Algebras booleanas 8

1.3 Familias dirigidas e inversas 11

2 Formas equivalentes a IBP **15**

2.1 Algunos equivalentes de IBP en la literatura 16

2.2 Dos equivalentes no tradicionales de IBP 17

2.3 IBP implica HB 19

3 Formas equivalentes a HB **20**

3.1 Elecciones difusas 20

3.2 Existencia de medidas 22

3.3 Análisis funcional, sin AC 26

3.4 Centro de masa 30

3.5 Elección coherente en espacios vectoriales 33

4 HB y la paradoja de Banach-Tarski **39**

A Tabla de implicaciones **45**

Capítulo 1

Preliminares

"Yet what are all such gaieties to me
Whose thoughts are full of indices and surds?
$x^2 + 7x + 53$
$= \frac{11}{3}$"

Lewis Carroll

1.1 El teorema de Hahn-Banach

Comenzamos por exponer la demostración más corriente en la literatura del teorema principal de este texto, la cual usa el axioma de elección (en la forma del lema de Zorn). Esta prueba es, pues, formalizable en ZF+AC.

Definición 1.1 Dado E espacio vectorial sobre $\mathcal{R}$, una *seminorma* sobre E es una función $p : E \to \mathcal{R}$ tal que
i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y), \ \forall x, y \in E$
ii) $p(\lambda x) = \lambda p(x), \ \forall x \in E, \ \forall \lambda \in \mathcal{R}, \ \lambda > 0$.

Lema 1.2 *Sean E espacio vectorial sobre $\mathcal{R}$, p seminorma sobre E, $V \leq E$, $f : V \to \mathcal{R}$ lineal, $f \leq p$ en V. Dado $x \in E - V$ existe $F : V + \mathcal{R}x \to \mathcal{R}$ extensión lineal de f, tal que $F \leq p$ en $V + \mathcal{R}x$.*

Demostración: Nótese que como $x \notin V$, cada $z \in V + \mathcal{R}x$ puede escribirse de manera única como $z = v + kx, \ v \in V, \ k \in \mathcal{R}$. Para $\lambda \in \mathcal{R}$, la función

$$g(v + kx) = f(v) + k\lambda$$

es una extensión lineal de de f. Se escogerá λ de forma que $g \leq p$ en $V + \mathcal{R}x$. Más exactamente, se escogerá λ de forma que $\forall v \in V : g(v + x) \leq p(v + x), \ g(v - x) \leq$

$p(v-x)$, y de esta forma, para $v \in V$, $k > 0 \in \mathcal{R}$ se tendrá $kg(v/k+x) \leq kp(v/k+x)$; así $g(v+kx) \leq p(v+kx)$. Similarmente con $k < 0$.

Para $v \in V$, $g(v+x) \leq p(v+x) \Leftrightarrow \lambda \leq p(v+x) - f(v)$, y $g(v-x) \leq p(v-x) \Leftrightarrow f(v) - p(v-x) \leq \lambda$. Por otro lado, dados $u, v \in V$ arbitrarios, $f(u) + f(v) = f(u+v) \leq p(u+v) \leq p(u-x) + p(v+x)$ y $f(u) - p(u-x) \leq p(v+x) - f(v)$. Puede verse entonces que

$$\sup_{u \in V}(f(u) - p(u-x)) \leq \inf_{v \in V}(p(v+x) - f(v))$$

Tomando λ entre estos dos números se obtiene el resultado.

Corolario 1.3 *En la notación anterior, para* $W \leq E$ *extensión lineal finita de* V *existe* $F : W \to \mathcal{R}$ *extensión lineal de* f, $F \leq p$ *en* W.

Nótese que este corolario no hace uso de ningún tipo de elección.

Teorema 1.4 (Hahn-Banach)(AC) *Sean* E *espacio vectorial sobre* $\mathcal{R}$, p *seminorma sobre* E, $V \leq E$, $\varphi : V \to \mathcal{R}$ *lineal,* $\varphi \leq p$ *en* V. *Entonces existe* $\Phi : E \to \mathcal{R}$ *extensión lineal de* φ, $\Phi \leq p$.

Demostración: Sea

$$K = \{\psi : W \to \mathcal{R} | \; V \leq W \leq E, \; \psi \text{ extensión lineal de } \varphi, \; \psi \leq p\}$$

y sea $\psi_1 \leq \psi_2$ si ψ_2 extiende a ψ_1. Es claro que $(K, \leq)$ es un orden parcial. Si $C \subseteq K$ es una cadena, entonces puede verse que $\bigcup C$ —en un sentido conjuntista— es una función lineal acotada por p definida sobre una extensión lineal de V que extiende a φ (es decir $\bigcup C \in K$) y a todos los elementos de C (es decir que $\bigcup C$ es cota superior de C). Podemos usar el lema de Zorn para obtener un elemento Φ maximal en K; pero si Φ está definida sobre un subespacio propio de E llegamos a una contradicción por el lema anterior.

El teorema de Hahn-Banach requiere del axioma de elección porque en cada uno de los (posiblemente infinitos) pasos inductivos existen muchas formas posibles de extender la función φ — consultar la discusión sobre la paradoja de Banach-Tarski y Wagon (1985, p. 207) para ver que, en efecto, Hahn-Banach no es un teorema de ZF.

1.2 Algebras booleanas

El concepto de *álgebra booleana* resulta de generalizar la idea de conjunto de subconjuntos de un conjunto dado X, provisto de estructura a través de las operaciones de unión, intersección y complemento. Muchos de los teoremas en esta teoría usan hipótesis de elección, y el Teorema del Ideal Booleano Primo (IBP) tiene una utilidad similar a la de HB en el análisis funcional.

Definición 1.5 Un *álgebra booleana* es un conjunto B con dos operaciones binarias $+, \cdot$, una operación unaria ^{c}, y elementos distintos $0, 1$ tales que para todo a, b, c en B:

1a) $a + a = a$	1b) $a \cdot a = a$
2a) $a + b = b + a$	2b) $a \cdot b = b \cdot a$
3a) $(a + b) + c = a + (b + c)$	3b) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
4a) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	4b) $a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$
5a) $a + a^c = 1$	5b) $a \cdot a^c = 0$
6a) $a + 0 = a$	6b) $a \cdot 1 = a$

En particular para X conjunto no vacío, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{A} \neq \emptyset$ cerrada bajo las operaciones de unión, intersección y complemento, $\mathcal{A}$ es un álgebra booleana con estas operaciones, $1 = X$, $0 = \emptyset$ (se llama a $\mathcal{A}$ un *álgebra de conjuntos*).

Para consultar las propiedades elementales de las álgebras booleanas se recomienda Levy (1979), de donde proviene la mayor parte de la información expuesta en esta sección.

Decimos que $a \leq b$ (o 'a contiene a b') si $a \cdot b = a$, de acuerdo con la definición correspondiente en álgebras de conjuntos; puede verse que $\leq$ es un orden parcial en B. Para $C \subseteq B$ decimos que C es *subálgebra de* B si C es no vacío y cerrado bajo las operaciones $+, \cdot, ^c$; en ese caso C es también un álgebra booleana con las operaciones heredadas de B. Un *homomorfismo* es una función $f : B \to C$ entre dos álgebras booleanas B y C que preserva las tres operaciones.

Se dice que $a \in B$ es un *átomo* si $a \neq 0$ y no existe $b \neq 0$ con $b < a$. Un álgebra booleana B es *atómica* si para todo $b \in B$ distinto de 0 existe un átomo $a \in B$ con $a \leq b$.

Lema 1.6 *Toda álgebra finita es atómica.*

Demostración: Sea B un álgebra finita, y supóngase que B no es atómica. Entonces existe $a_1 \neq 0$ en B tal que a_1 no contiene ningún átomo. En particular a_1 no es un átomo, luego existe $a_2 \neq 0$, $a_2 < a_1$. Pero a_2 tampoco es un átomo, y así existe $a_3 \neq 0$, $a_3 < a_2$, etc. Llegamos a una contradicción repitiendo este procedimiento $|B| + 1$ veces.

Definición 1.7 Sea B álgebra booleana. Una *partición* de B es un subconjunto finito P de B, $0 \notin P$, tal que

i) $\forall p, q \in P,\ p \neq q:\ p \cdot q = 0$

ii) $\sum_{p \in P} p = 1$

Definición 1.8 Sea B álgebra booleana, y sean P, Q particiones de B. Definimos

$$\overline{PQ} = \{p \cdot q |\, p \in P,\ q \in Q,\ p \cdot q \neq 0\}$$

Llamamos a $\overline{PQ}$ el *refinamiento común* de P y Q.

Lema 1.9 *$\overline{PQ}$ es una partición, y cada elemento de $\overline{PQ}$ puede escribirse de manera única en la forma $p \cdot q$, $p \in P$, $q \in Q$. Además,*

i) $\overline{PP} = P$

ii) $\overline{PQ} = \overline{QP}$

iii) $\overline{\overline{PQ}R} = \overline{P\overline{QR}}$

para todas las particiones P, Q, R de B.

Demostración: Para $p_1, p_2 \in P,\ q_1, q_2 \in Q,\ (p_1, q_1) \neq (p_2, q_2)$ se tiene $p_1 \cdot q_1 \cdot p_2 \cdot q_2 = p_1 \cdot p_2 \cdot q_1 \cdot q_2 = 0$ — esto muestra que cada elemento de $\overline{PQ}$ tiene una única representación, y que sus elementos son disyuntos dos a dos. Además

$$\sum_{p \in P,\ q \in Q} p \cdot q = \sum_{p \in P} p \cdot \left(\sum_{q \in Q} q \right) = \sum_{p \in P} p = 1$$

y así $\overline{PQ}$ es una partición.

i) y *ii)* son evidentes. Para ver *iii)* nótese que

$$\overline{\overline{PQ}R} = \{p \cdot q \cdot r |\, p \in P,\ q \in Q,\ r \in R,\ p \cdot q \cdot r \neq 0\} = \overline{P\overline{QR}}$$

El siguiente lema describe una dualidad entre particiones y subálgebras finitas que será importante en los siguientes capítulos.

Lema 1.10 *Dada una subálgebra finita C de B, el conjunto de átomos en C es una partición de B. Recíprocamente, dada una partición P de B obtenemos una subálgebra finita de B tomando las sumas arbitrarias de elementos en P (incluyendo 0 como la suma vacía). De hecho, ambas operaciones son inversas la una de la otra.*

Si I es un ideal en B que contiene A, entonces por definición $D \subseteq I$; esto completa la prueba.

Lema 1.13 *Un ideal I es primo si y sólo si es maximal, es decir si no está contenido propiamente en otro ideal.*

Demostración: Si I es primo, entonces no puede estar propiamente contenido en ningún ideal J, pues si $a \in J, a \notin I$, entonces $a^c \in I$ y $a + a^c = 1 \in J$, una contradicción. Por otro lado, supóngase I maximal, y sea $a \in B$ con $a \notin I$, $a^c \notin I$. Considere $A = I \cup \{a\}$ en el sentido de lema anterior: si $c \in I$ tal que $c + a = 1$, entonces $a^c \leq c$ y $a^c \in I$, contradicción. Encontramos así un ideal que extiende propiamente a I, y con él una nueva contradicción.

Teorema 1.14 (Teorema del Ideal Booleano Primo)(AC) *Sean B un álgebra booleana, I un ideal en B. Entonces existe un ideal primo J en B que contiene a I.*

Demostración: Considere el conjunto $T = \{J \subseteq B | \ J \text{ ideal}, \ I \subseteq J\}$, ordenado por inclusión. Entonces T es no vacío, y dada una cadena $S \subseteq T$, puede verse que $\bigcup S$ es un ideal que contiene a I, y a cada $K \in S$. Podemos aplicar el lema de Zorn para obtener un elemento maximal de T, es decir un ideal J que extiende a I y que no está contenido propiamente en ningún otro ideal, q.e.d.

1.3 Familias dirigidas e inversas

> "Der Regen fliesst eben herunter und fliesst eben nicht nach oben."
>
> Bertolt Brecht

El material de esta sección es una transcripción bastante fiel de Grätzer (1979), pp. 128-132.

Decimos que un orden parcial $(I, \leq)$ es *dirigido* si para todo $i, j \in I$ existe $k \in I$ con $i \leq k, \ j \leq k$.

Definición 1.15 Se define una *familia dirigida de conjuntos* $\mathcal{A}$ como una tríada de los siguientes objetos:

i) Un conjunto parcialmente ordenado dirigido $(I, \leq)$, llamado el *soporte* de $\mathcal{A}$.

ii) Una colección de conjuntos no vacíos $(A_i)_{i\in I}$.

iii) Para cada $i, j \in I$, $i \leq j$, una función $\varphi_{ij} : A_i \to A_j$, de manera que $\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik}$, $i \leq j \leq k$, y φ_{ii} es la función identidad.

Se denotará a la familia $\mathcal{A}$ como $(A_i, \varphi_{ij})_{i,j\in I}$ en lugar de $((I, \leq), (A_i)_{i\in I}, (\varphi_{ij})_{i,j\in I, i\leq j})$ por razones obvias de comodidad. Se abreviará la condición *iii)* diciendo que las funciones (φ_{ij}) son *coherentes.*

Dada una familia dirigida $\mathcal{A} = (A_i, f_{ij})_{i,j\in I}$, defínase la siguiente relación en $\bigcup_{i\in I} A_i$: para $a \in A_i$, $b \in A_j$, $a \sim b$ si existe $k \geq i, j$ tal que $\varphi_{ik}(a) = \varphi_{jk}(b)$. Esta definición solamente tiene sentido cuando los A_i son disyuntos dos a dos, y si éste no es el caso es mejor usar conjuntos equivalentes disyuntos como $A_i' = A_i \times \{i\}$. $\sim$ es una relación de equivalencia: la reflexividad y la simetría son evidentes. Para probar transitividad sean $a \in A_{i_1}$, $b \in A_{i_2}$, $c \in A_{i_3}$, $a \sim b$, $b \sim c$. Entonces existen j_1, j_2 tales que $j_1 \geq i_1, i_2$, $j_2 \geq i_2, i_3$, y $\varphi_{i_1 j_1}(a) = \varphi_{i_2 j_1}(b)$, $\varphi_{i_2 j_2}(b) = \varphi_{i_3 j_2}(c)$. Pero para $k \geq j_1, j_2$,

$$\begin{aligned}\varphi_{i_1 k}(a) &= \varphi_{j_1 k}(\varphi_{i_1 j_1}(a)) = \varphi_{j_1 k}(\varphi_{i_2 j_1}(b)) = \varphi_{i_2 k}(b)\\ &= \varphi_{j_2 k}(\varphi_{i_2 j_2}(b)) = \varphi_{j_2 k}(\varphi_{i_3 j_2}(c)) = \varphi_{i_3 k}(c)\end{aligned}$$

Definición 1.16 Se llamará *límite directo de la familia dirigida* $\mathcal{A}$, o $\varinjlim A_i$, al conjunto de clases de equivalencia de $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ bajo $\sim$. Se denotará $\bar{a}$ a la clase de a bajo $\sim$.

Ahora veremos que si los A_i tienen una estructura adicional preservada por las funciones φ_{ij}, ésta induce a una estructura similar en $\varinjlim A_i$.

Definición 1.17 Se define una *familia dirigida de álgebras booleanas* $\mathcal{B}$ como una tríada de los siguientes objetos:

i) Un conjunto parcialmente ordenado dirigido $(I, \leq)$, llamado el *soporte* de $\mathcal{B}$.

ii) Una colección de álgebras booleanas $(B_i)_{i\in I}$.

iii) Para cada $i, j \in I$, $i \leq j$, un homomorfismo $f_{ij} : A_i \to A_j$, de manera que $f_{jk} \circ f_{ij} = f_{ik}$, $i \leq j \leq k$, y f_{ii} es la función identidad.

Definimos operaciones en $\varinjlim B_i$ de la siguiente manera: dadas dos clases de equivalencia, escójanse representantes a, b de cada una de ellas de forma que $a, b \in B_i$, $i \in I$ (esto siempre es posible porque $(I, \leq)$ es dirigido); defínase $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$, $\bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}$, $\bar{a}^c = \overline{a^c}$. Para verificar la buena definición, supónganse $a' \sim$

Capítulo 2

Formas equivalentes a IBP

"You know, for a mathematician he did not have enough imagination. But he has become a poet and now he's doing fine..."

Hilbert, sobre un alumno antiguo

"O Fortuna
velut Luna
statu variabilis"

Carmina Burana

Por algún tiempo se especuló que HB podría ser equivalente con IBP, especialmente desde que fue demostrado que IBP implica HB por Łos y Ryll-Nardzevsky,[1] e independientemente por Luxemburg.[2] En 1974 David Pincus rebatió esta conjetura,[3] construyendo un modelo de la teoría de conjuntos en donde se satisface HB pero no IBP. En forma similar se mostró que IPB no implica AC [4]—ambas pruebas están bastante fuera del alcance de este texto.

[1]J. Łos, C.Ryll-Nardzevsky, "On the applications of Tychanov's theorem in mathematical proofs", *Fund. Math.* 38, 1951, pp. 233-237.

[2]W.A.J. Luxemburg, "Two applications of the method of construction by ultrapowers to analysis", *Bull. A.M.S.* 68, 1962, pp. 416-419.

[3]D. Pincus, "The Strength of the Hahn-Banach Theorem", 1974; ver bibl.

[4]J.D.Halpern and A. Levy, "The Boolean Prime Ideal theorem does not imply the Axiom of Choice", *Proc. Symp. Pure Math.* Vol. XIII, Part I, pp. 83-134, 1971.

2.1 Algunos equivalentes de IBP en la literatura

Teorema 2.1 (ver Levy, 1979, 2.19) *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

i) *Existencia de ultrafiltros: toda álgebra booleana contiene un ultrafiltro (o equivalentemente, un ideal primo).*

ii) *El teorema del ideal booleano primo.*

iii) *Representación de Stone: para toda álgebra booleana B existe un conjunto X tal que B es isomorfa a un álgebra de conjuntos sobre X.*

Demostración: *ii)*$\rightarrow$ *iii)* Para B álgebra booleana sea X el conjunto de los ultrafiltros en B. Sea, para $a \in B$, $H(a) = \{U \in X | a \in U\}$. Si $a, b \in B$ con $a \not\leq b$, entonces el ideal $I = \{c \in B | \ c \leq b + a^c\}$ está contenido en un ideal primo I' que contiene a b pero no contiene a a, y así $H(b) \neq H(a)$ y H es inyectiva. Por otro lado, puede verificarse que $H(a \cdot b) = H(a) \cap H(b)$, $H(a^c) = H(a)^c$ usando las propiedades básicas de los ultrafiltros. La ley de Morgan muestra entonces que $H(a+b) = H(a) \cup H(b)$, y así H(B) es una subálgebra de $\mathcal{P}(X)$—es decir un álgebra de conjuntos sobre X—isomorfa a B.

Para ver *iii)* $\rightarrow$ *i)* sea B álgebra, y B' álgebra de conjuntos sobre X isomorfa a B. Para $x \in X$ fijo, sea $U' = \{A \in B' | x \in A\}$. Evidentemente U' es ultrafiltro, y así encontramos $U \subseteq B$ ultrafiltro.

Suponiendo *i)*, dada B álgebra booleana e $I \subseteq B$ ideal definimos la siguiente relación en B: $a \sim b$ si $a \otimes b = (a - b) + (b - a) \in I$. Puede mostrarse que $\sim$ es una relación de equivalencia, y que para $a_1 \sim a_2$, $b_1 \sim b_2$ se cumple

$$a_1 \cdot b_1 \sim a_2 \cdot b_2, \ a_1 + b_1 \sim a_2 + b_2, \ a_1^c \sim a_2^c.$$

Esto nos permite definir operaciones

$$[a] + [b] = [a + b], \ [a] \cdot [b] = [a \cdot b], \ [a]^c = [a^c]$$

en el conjunto de clases de equivalencia de B, llamado B/I, formando el *álgebra cociente de B sobre I*. La función $a \rightarrow [a]$ es un homomorfismo natural de B en B/I, con kernel I. Ahora sí, por *i)* existe J ideal primo en B/I. Sea $I' = \{a \in B | [a] \in J\}$; entonces $I \subseteq I' \subset B$, y para $a, b \in I'$ tenemos $[a+b] = [a] + [b] \in J$, luego $a + b \in I'$. De la misma forma si $a \leq b$, $b \in I'$, se tiene $a \in I'$, y si $a \notin I'$, entonces $[a]$ no está en J, pero $[a]^c = [a^c] \in J$ y $a^c \in I'$. Así, I' ideal primo.

El teorema de representación de Stone justifica la intuición de ver toda álgebra booleana como un álgebra de conjuntos. En ausencia de IBP el teorema anterior nos dice que la representacion de Stone es solamente eso, una intuición.

Es un hecho conocido que el axioma de elección es equivalente al teorema de Tychonoff, que afirma que el producto arbitrario de espacios topológicos compactos es compacto. Una de las demostraciones más elegantes del teorema de Tychonoff es la que se lleva a cabo basándose en la existencia de un ultrafiltro que extiende a un filtro en un contexto apropiado. Si se supone además que los espacios topológicos en cuestión son de Hausdorff, entonces puede hacerse que esta extensión sea el *único* uso del axioma de elección—la única construcción no determinista—en la prueba. De esta forma se muestra que IBP implica el teorema de Tychonoff para espacios compactos de Hausdorff. De hecho se cumple el siguiente teorema, que enunciamos sin demostración:

Teorema 2.2 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) El teorema del ideal booleano primo.

ii)Tychonoff Hausdorff: para toda colección $(X_i)_{i\in I}$ *de espacios topologicos compactos de Hausdorff, el espacio producto* $\prod_{i\in I} X_i$ *es compacto.*

(ver Levy (1979), VII.2.21)

Es importante hacer aquí una observación: en ausencia de AC, dada una colección de espacios topológicos $(X_i)_{i\in I}$ no podemos decir a primera vista que el producto $\prod_{i\in I} X_i$ es no vacío. Sin embargo si asumimos el teorema de Tychonoff Hausdorf (o si el lector lo prefiere, IBP, que es lo mismo) entonces podemos mostrar además que dada una familia $(X_i)_{i\in I}$ de espacios topologicos compactos de Hausdorff, donde cada X_i es no vacío, se tiene $\prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$ (esto es, el axioma de elección para espacios compactos de Hausdorff): sea $Y_i = X_i \cup \{p\}$, con $p \notin \bigcup_{i\in I} X_i$, y sea $\tau_{Y_i} = \tau_{X_i} \cup \{\{p\} \cup U | U \in \tau_{X_i}\}$. Entonces (Y_i, τ_{Y_i}) compacto de Hausdorff con X_i cerrado. Así $\prod_{i\in I} Y_i$ es compacto por el teorema de Tychonoff Hausdorff; la colección $\{\pi_i^{-1}(X_i) | \ i \in I\}$, π_i proyección sobre Y_i, tiene intersección no vacía por cumplir la propiedad de intersecciónes finitas, es decir $\prod_{i\in I} X_i \neq \emptyset$.

2.2 Dos equivalentes no tradicionales de IBP

Se presentan ahora dos axiomas propuestos por el profesor Caicedo, que involucran a las familias inversas. Pueden verse como formas explícitamente debilitadas del axioma de elección, en cuanto que afirman la existencia de una elección $(a_i)_{i\in I}$ en una familia de conjuntos $(A_i)_{i\in I}$ con $a_i \in A_i$ para cada $i \in I$, con la diferencia de que se imponen condiciones adicionales a la familia de conjuntos y a los elementos escogidos.

ACC finito: Sea $(A_i, f_i^j)_{i,j\in I}$ familia inversa de conjuntos finitos. Entonces existe $(a_i)_{i\in I}$, $a_i \in A_i$, tal que $(a_i)_{i\in I}$ es coherente, es decir $f_i^j(a_j) = a_i$, para todo $i, j \in I$, $i \leq j$.

ACC compacto Hausdorff: Sea $(X_i, f_i^j)_{i,j\in I}$ familia inversa de espacios topológicos compactos de Hausdorff. Entonces existe $(a_i)_{i\in I}$, $a_i \in X_i$, tal que $(a_i)_{i\in I}$ es coherente.

Visto de otro modo, las conclusiones afirman simplemente que los límites inversos son distintos de vacío. La condición 'A_i finito' en ACC finito no se puede eliminar: para verlo tómese $I = \mathcal{N}$, $A_n = \mathcal{N}$, y $f_n^m(k) = k + (m - n)$, para $n \leq m$, como en la sección 1.3.

Teorema 2.3 *Son equivalentes en ZF:*

i) El teorema del ideal booleano primo.

ii) ACC compacto Hausdorff.

iii)ACC finito.

Demostración: *i)* $\rightarrow$ *ii)*: dada $(X_i, f_i^j)_{i,j\in I}$ familia inversa de espacios topológicos compactos de Hausdorff, sea para $i \leq j$ en I

$$Z_i^j = \{(x_k) \in \prod_{k\in I} X_k |\ f_i^j(x_j) = x_i\}$$

Sea $G_i^j \subseteq X_j \times X_i$ grafo de f_i^j, el cual es cerrado porque f_i^j continua, X_i Hausdorff. Entonces $Z_i^j = \pi_i^{j-1}(G_i^j)$, π_i^j proyección sobre $X_j \times X_i$, y así Z_i^j es cerrado. Por otro lado nótese que el producto $\prod_{k\in I} X_k \neq \emptyset$ es compacto; sea $(z_k) \in \prod_{k\in I} X_k$. Para $i_1 \leq j_1$, $i_2 \leq j_2, \ldots, i_n \leq j_n$, sea $k \geq i_\gamma, j_\gamma$, $\gamma = 1, \ldots, n$. Sea $y \in X_k$, y

$$\begin{array}{ll} y_{i_\gamma} = f_{i_\gamma}^k(y), & \gamma = 1 \ldots n \\ y_{j_\gamma} = f_{j_\gamma}^k(y), & \gamma = 1 \ldots n \\ y_i = z_i, & i \neq i_\gamma, j_\gamma, k \end{array}$$

Entonces $(y_i) \in \bigcap_{\gamma=1}^n Z_{i_\gamma}^{j_\gamma}$. Concluimos que $\bigcap_{i\leq j} Z_i^j \neq \emptyset$.

ii) $\rightarrow$ *iii)*: obvio.

La demostración de *iii)* $\rightarrow$ *i)* se pospone para el próximo capítulo, en donde se seguirá de un teorema más general.

Hasta aquí los equivalentes de IBP que estarán involucrados en la discusión del próximo capítulo. Como una curiosidad, he aquí para el lector interesado otros tres resultados equivalentes a IBP, provenientes de diferentes campos:

Teorema de completitud (en la lógica de primer orden):[5] Para $\Phi \subseteq L^S$, $\varphi \in L^S$: si $\Phi \models \varphi$ entonces $\Phi \vdash \varphi$.

Compactificación de Stone-Čech:[6] para todo X espacio topológico completamente regular, existe la compactificación de Stone-Čech de X.

3-coloración de grafos:[7] Sea G un grafo tal que todo subgrafo finito de G se puede colorear con 3 colores. Entonces G se puede colorear con 3 colores.

2.3 IBP implica HB

Teorema 2.4 *IBP implica HB.*

Demostración: Se demostrará el teorema de Hahn-Banach usando el axioma de elección coherente compacta Hausdorff. Sean E un espacio vectorial, p una semi-norma, $V \leq E$ y $\varphi \in V'$ tal que $\varphi \leq p$. Sea $I = \{F \leq E \mid \dim F < \infty\}$, I ordenado por inclusión. Defínanse para $F \leq G$ en I, $A_F = F'$, $A_G = G'$ y $\gamma_F^G : G' \to F'$ la función restricción. Es fácil ver que $(I, \leq)$ es un orden parcial dirigido, y que las funciones γ_F^G son lineales y coherentes entre sí. Ahora, como F' tiene dimensión finita, podemos asociarle una topología natural, a saber aquella inducida por una norma arbitraria definida sobre F'—cualesquiera dos normas son equivalentes y generan la misma topología. Puede verse además que las funciones γ_F^G, por ser lineales, son automáticamente continuas para estas topologías. Sea $C_F = \{f \in F' \mid f = \varphi \text{ en } F \cap V,\ f \leq p \text{ en } F\}$. Para ver que C_F es compacto como subespacio de F', sea $\{b_1, \dots b_n\}$ base de F, y $\|\cdot\|$ la norma euclídea inducida en F por esta base. Si $f_n \to f$ en F', $f_n \in C_F$, entonces en particular $f_n \to f$ puntualmente y así $f \in C_F$, por lo que C_F es cerrado. Por otro lado, para $f \in C_F$, tenemos $-p(-b_k) \leq f(b_k) \leq p(b_k)$, $k = 1 \dots n$, y para $x = \sum_{i=1}^n l_i b_i$, $\| x \| \leq 1$, se tiene en particular $|l_i| \leq 1$ y $|f(x)| \leq nM$, donde M es el máximo de los números $p(b_1), \dots, p(b_n), -p(-b_1), \dots, -p(-b_n)$. De esta forma C_F es cerrado y acotado en F' con la norma inducida por $(F, \|\cdot\|)$, y como F es de dimensión finita puede verse que C_F es compacto. Gracias al axioma de elección coherente compacta de Hausdorff encontramos $(f_F)_{F \in I}$ coherente bajo restricciones. Definimos $\Phi(x) = f_F(x)$ para $x \in E$, donde $F \in I$ arbitrario con $x \in F$; la coherencia de las funciones f_F asegura la buena definición de Φ. Además, la condición $f_F \in C_F$ implica que Φ es una extensión lineal de φ acotada por p.

[5] H. Henkin, "Metamathematical Theorems equivalent to the Prime Ideal Theorem for Boolean Algebra", *Bull. A.M.S.* 60, 387 (abstract).

[6] H. Rubin, D. Scott, "Some topological theorems equivalent to the Prime Ideal Theorem", *Bull. A.M.S* 60, 389, 1954 (abstract).

[7] H.Läuchli, "Coloring infinite graphs and the Boolean Prime Ideal Theorem", *Israel Journal of Mathematics* 9, 1971, pp. 422-429.

Capítulo 3

Formas equivalentes a HB

"Pero sabed que todos estamos de acuerdo, digamos lo que digamos."

(Turba Philosophorum)

3.1 Elecciones difusas

Definición 3.1 Sea B álgebra booleana. Una *medida* sobre B es una función $m : B \to \mathcal{R}$ tal que

i) $m(b) \geq 0, \ \forall b \in B$

ii) $m(a+b) = m(a) + m(b), \ \forall a, b \in B, \ a \cdot b = 0$

iii) $m(1) = 1$

Llamaremos $\exists$Medidas a la afirmación 'dada una álgebra booleana B, existe una medida m sobre B'. Enunciaremos ahora un principio de elección coherente similar a ACC finito pero más débil, que será equivalente a HB.

Definición 3.2 Para un conjunto finito A, una *elección difusa en* A es una función $\alpha : A \to [0, 1]$ con $\sum_{a \in A} \alpha(a) = 1$.

El concepto de elección difusa tiene varios nombres y definiciones equivalentes en diferentes teorías, como por ejemplo una probabilidad en un espacio de probabilidad finito, o un elemento del simplejo generado por A (en topología algebráica, para A geométricamente independiente en un espacio vectorial), o un cierto subconjunto de A en la teoría de conjuntos difusos. En este caso lo vemos como una generalización del concepto de elección de un elemento de A.

Definición 3.3 Sean A_1, A_2 conjuntos finitos, $f : A_1 \to A_2$. Dos elecciones difusas α_1, α_2 en A_1, A_2 respectivamente se dicen *coherentes respecto a* f (o simplemente *coherentes*) si para todo a en A_2 se cumple $\alpha_2(a) = \sum_{c \in f^{-1}(a)} \alpha_1(c)$.

Considere la siguiente afirmación:

> **ACC difuso finito:** Sea $(A_i, f_i^j)_{i,j\in I}$ familia inversa de conjuntos finitos. Entonces existe $(\alpha_i)_{i\in I}$, α_i elección difusa en A_i, tal que $(\alpha_i)_{i\in I}$ coherente, es decir $\forall i, j \in I,\ i \leq j :\ \alpha_i, \alpha_j$ coherentes respecto a f_i^j.

Ahora, la elección de α difuso en A es equivalente a la elección de una medida en $\mathcal{P}(A)$. Esta es la base para nuestro

Teorema 3.4 *ACC difuso finito es es equivalente con $\exists$Medidas.*

Demostración: Supóngase $\exists$Medidas, y sea $(A_i, f_i^j)_{i,j\in I}$ familia inversa de conjuntos finitos. Considere la familia $(\mathcal{P}(A_i), g_{ij})_{i,j\in I}$ con $g_{ij}(U) = f_i^{j-1}(U)$, $U \subseteq A_i$. Es evidente que las funciones g_{ij} son homomorfismos coherentes, por lo que se trata de una familia dirigida de álgebras booleanas. Sea $B = \lim_{\to} \mathcal{P}(A_i)$, y m medida sobre B, $m(B) = 1$. Entonces m induce a una colección coherente $(m_i)_{i\in I}$ de medidas en $(\mathcal{P}(A_i), g_{ij})_{i,j\in I}$, $m_i(U) = m([U])$. Definiendo $\alpha_i(a) = m_i\{a\}$, $i \in I$, es obvio—por la coherencia de (m_i)—que (α_i) es coherente.

Supóngase ahora ACC difuso finito, y sea B un álgebra booleana. Sea $(B_i, \imath_{ij})_{i,j\in I}$ una familia directa formada por las subálgebras finitas de B, $\imath_{ij}$ identidad, y sea $A_i \subseteq B_i$ la partición generada por B_i. Se tiene entonces que para $i \leq j$, A_j es un refinamiento de A_i, y para cada $d \in A_j$ existe un único $c \in A_i$ con $d \leq c$. Defínase $f_i^j(d) = c$. Por construcción, (f_i^j) es coherente, y así $(A_i, f_i^j)_{i,j\in I}$ es una familia inversa de conjuntos finitos. Sea α_i una colección coherente de elecciones difusas, y defínase en B_i la medida

$$m_i(u) = \sum_{c\in A_i,\ c\leq u} \alpha_i(c)$$

Así, para $i \leq j$,

$$m_i(u) = \sum_{c\in A_i,\ c\leq u} \alpha_i(c) = \sum_{c\in A_i,\ c\leq u}\ \sum_{d\in A_j,\ d\leq c} \alpha_j(d) = \sum_{d\in A_j,\ d\leq u} \alpha_j(d) = m_j(u)$$

De esta forma (m_i) es coherente, e induce a una medida en $\lim_{\to} B_i \approx B$ haciendo $m([u]) = m_i(u)$, $u \in B_i$.

La prueba original que teníamos de este teorema era varias veces más larga y oscura: en ella se construía explícitamente la idea de límite directo en una familia directa de álgebras, que yo no conocía, y que parece ser común en la literatura— afortunadamente para la claridad en la prueba, desafortunadamente para su originalidad.

Dada un álgebra booleana B, una medida m sobre B que sólo asume los valores 0 y 1 induce un ultrafiltro $F = \{b \in B | \, m(b) = 1\}$ de B (si $a, b \in F$, entonces $m(b-a) \leq m(a^c) = 0$, luego $1 = m(b) = m(b-a) + m(b \cdot a) = m(b \cdot a)$ y $a \cdot b \in F$; las demás condiciones son evidentes). Igualmente, un ultrafiltro F sobre B induce a una medida m haciendo $m(b) = 1$ si $b \in F$, $m(b) = 0$ si $b \notin F$. Nótese que si se asume en el teorema anterior que tanto la medida m sobre B como las elecciones difusas (α_i) solamente toman los valores 0 y 1, entonces se obtiene una prueba directa de la equivalencia entre ACC finito y la existencia de ultrafiltros en álgebras booleanas arbitrarias, que a su vez es equivalente a IBP.

3.2 Existencia de medidas

El resultado principal de esta sección es la equivalencia entre HB y $\exists$Medidas; para la dirección más difícil ($\exists$Medidas $\rightarrow$ HB) se consultó a Luxemburg (1969, teorema principal). La prueba a continuación simplifica sustancialmente la demostración original, de tal forma que no se menciona el sistema de reales no estándar (así como otras construcciones similares), usando en su lugar herramientas propias de las familias directas e inversas tal como se hizo anteriormente.

Comenzamos por demostrar la otra dirección:

Teorema 3.5 *HB implica la existencia de medidas en álgebras booleanas arbitrarias.*

Demostración: Dada un álgebra booleana B, sea

$$E = \{f : A \rightarrow \mathcal{R} | \; A \text{ partición finita de } B\}$$

Si la intuición nos dice que un álgebra booleana puede verse como una colección de subconjuntos de un conjunto X, la misma intuición nos debe decir que E representa las funciones simples reales sobre X. Desde ese punto de vista esta prueba resulta bastante natural; sin embargo nótese que una misma función simple puede estar representada por varias funciones en E.

Para $f : A_1 \rightarrow \mathcal{R}, g : A_2 \rightarrow \mathcal{R}$ en E, sea

$$f + g : \overline{A_1 A_2} \rightarrow \mathcal{R}, \;\; (f+g)(ab) = f(a) + g(b), \;\; \text{donde } a \in A_1, \;\; b \in A_2$$

Se recuerda que $\overline{A_1 A_2}$ es el refinamiento común de A_1 y A_2, y que $f + g$ está bien definida porque cada elemento de $\overline{A_1 A_2}$ se puede escribir en forma única como $ab, \;\; a \in A_1, \;\; b \in A_2$. Se define $kf : A \rightarrow \mathcal{R}$ de la forma usual, $k \in \mathcal{R}$.

Puede verificarse que E es un espacio vectorial con la suma y multiplicación definidas usando las propiedades de las particiones y sus refinamientos mencionadas en el primer capítulo. Definimos sobre E la seminorma $\| f \| = \sup_{a \in A} |f(a)|$.

Sea $S = \{f \in E | \, f \text{ constante}\}$, y para $f \in S$ sea $\phi(f) = \| f \|$. Es obvio que S es subespacio de E, ϕ lineal, $\phi \leq \| \ \|$ en S. Sea pues Φ extensión *à la HB* de ϕ, es decir Φ extensión lineal de ϕ dominada por $\| \ \|$. Sea ahora $m : B \to \mathcal{R}$, $m(0) = 0$, $m(1) = 1$, y $m(a) = \Phi(f_a)$ para $a \neq 0, 1$ en B, donde $f_a : \{a, a^c\} \to \mathcal{R}$, $f_a(a) = 1$, $f_a(a^c) = 0$. Para $a, b \neq 0, 1$ en E con $ab = 0$, tenemos $\phi(f_{a+b} - (f_a + f_b)) = 0$, luego

$$m(a + b) = \Phi(f_{a+b}) = \Phi(f_a + f_b) = m(a) + m(b)$$

Por último, sea $a \neq 0, 1$ en B. Entonces $m(a) \leq \| f_a \| = 1$, $m(a^c) \leq \| f_{a^c} \| = 1$, y $m(a) + m(a^c) = 1$, lo que implica $m(a), m(a^c) \geq 0$.

Para demostrar el recíproco del teorema anterior enunciamos, sin demostración, el siguiente resultado:

Lema 3.6 *Sean X un espacio métrico, Y un espacio métrico completo, $D \subseteq X$ denso, y $f : D \longrightarrow Y$ uniformemente continua. Entonces existe $\hat{f} : X \longrightarrow Y$ tal que $\hat{f}$ es una extensión continua de f.*

(Ver Munkres, *Topology, a first Course*, §7.1, ex. 2)

En particular, si X es un espacio vectorial normado, $D \leq X$ es denso, y $f : D \longrightarrow R$ es lineal continua (por tanto uniformemente continua), la extensión continua $\hat{f}$ también será lineal, por la continuidad de la suma en X.

Se aplicará el Lema 3.6 de la siguiente manera: dado A conjunto arbitrario, sea m medida en $\mathcal{P}(A)$. Haciendo $X = \{f \in R^A \mid f \text{ acotado}\}$, defínase para $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{E_i} \in X$ función simple arbitraria,

$$\int s \ \mathrm{d}m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m(E_i)$$

Considerando a X como espacio vectorial normado con la norma del supremo, la función $\int \mathrm{d}m$ es lineal continua en el subespacio D de las funciones simples. Pero una construcción conocida de la teoría de medida muestra que D es denso en X: para $f \in X, n \in \mathcal{N}$, divídase el intervalo $[- \| f \|, \| f \|]$ en n partes iguales,

$$I_1 = [x_0, x_1),\ I_2 = [x_1, x_2), \ldots,\ I_n = [x_{n-1}, x_n],\ x_i = - \| f \| + \frac{2 \| f \| \, i}{n}$$

Entonces la función $s_n = \sum_{i=1}^{n} x_n \chi_{f^{-1}(I_i)}$ cumple con $\| s_n - f \| \leq \frac{2\|f\|}{n}$, y la sucesión $\{s_n\}$ converge a f. Extendemos $\int \mathrm{d}m$ a todo X, usando el Lema 3.6, y hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 3.7 *Para un conjunto arbitrario A, $X = \{f \in R^A \mid f \text{ acotada}\}$ y una medida m en $\mathcal{P}(A)$, la integral definida como arriba es un funcional lineal continuo sobre X.*

Si $B \subseteq A$, definimos $\int_B f \, \mathrm{d}m = \int_A \chi_B f \, \mathrm{d}m$.

Teorema 3.8 *Sean m una medida sobre A, y $f : A \to \mathcal{R}$ acotada.*

a) Si $A = B \cup C$, $B \cap C = \emptyset$, entonces $\int_A f \, dm = \int_B f \, dm + \int_C f \, dm$

b) Si $B \subseteq A$ es tal que $m(B) = 0$ ó $f = 0$ en B, entonces $\int_B f \, dm = 0$.

c) Si $f \geq 0$ en X, entonces $\int f \, dm \geq 0$

Demostración: a) se deduce inmediatamente de la linealidad de $\int_A \mathrm{d}m$. Para ver b), si $m(B) = 0$ sea $\{s_n\} \to f$ como arriba; entonces $\{\chi_B s_n\} \to \chi_B f$, y

$$\int_B f \, \mathrm{d}m = \int_A \chi_B f \, \mathrm{d}m = \lim_{n \to \infty} \int_A \chi_B s_n \, \mathrm{d}m = 0$$

Si $f = 0$ en B la afirmación es evidente.

c) Para $f \geq 0$, puede encontrarse $\{s_n\}$ sucesión de funciones simples con $\{s_n\} \to f$ como arriba, y $s_n \geq 0$, de manera que $\int s_n \, \mathrm{d}m \geq 0$, $\forall n \in \mathcal{N}$, y

$$\int f \, \mathrm{d}m = \lim_{n \to \infty} \int s_n \, \mathrm{d}m \geq 0$$

Se deduce del Teorema 3.8 que la función $\int \, \mathrm{d}m$ es creciente: para $f \leq g$ en X se cumple $\int f \, \mathrm{d}m \leq \int g \, \mathrm{d}m$.

Por último tenemos el

Lema 3.9 *Sean A, B conjuntos, $\gamma : A \longrightarrow B$ y m_1, m_2 medidas sobre $\mathcal{P}(A), \mathcal{P}(B)$ respectivamente t.q. $\forall U \subseteq B : m_2(U) = m_1(\gamma^{-1}(U))$. Entonces para $f : B \longrightarrow R$ acotada se cumple*

$$\int f \, dm_2 = \int f \circ \gamma \, dm_1$$

Demostración:

i) Para $s = \sum_{i=1}^k \alpha_i \chi_{E_i}$ simple, puede suponerse sin pérdida de generalidad que $\{E_i\}$ es una partición de B; entonces $\{\gamma^{-1}(E_i)\}$ partición de A (algunos elementos pueden ser vacíos), y $s \circ \gamma = \alpha_i$ en $\gamma^{-1}(E_i)$. Así,

$$\int s \circ \gamma \, \mathrm{d}m_1 = \sum_{i=1}^k \alpha_i m_1(\gamma^{-1}(E_i)) = \sum_{i=1}^k \alpha_i m_2(E_i) = \int s \, \mathrm{d}m_2$$

ii) Para f arbitraria, sea $\{s_n\} \to f$, con s_n simple. Entonces también $\{s_n \circ \gamma\} \to f \circ \gamma$, y así

$$\int f \circ \gamma \; dm_1 = lim_{n\to\infty} \int s_n \circ \gamma \; dm_1 = lim_{n\to\infty} \int s_n \; dm_2 = \int f \; dm_2$$

Ahora estamos listos para demostrar el teorema principal de esta sección.

Teorema 3.10 *La existencia de medidas en álgebras booleanas arbitrarias implica HB.*

Demostración: Dados E espacio vectorial, p seminorma, $V \leq E$, $\varphi : V \to R$ lineal, $\varphi \leq p$, tómese como soporte I al conjunto de las extensiones lineales finitas de V en E, ordenado por inclusión. Claramente $(I, \leq)$ es un orden parcial dirigido. Para $W \in I$, sea W' el dual de W y

$$\hat{W}' = \{\psi \in W' \mid \psi \text{ extiende a } \varphi, \; \varphi \leq p\}$$

Es decir, $\hat{W}'$ es el conjunto de las 'extensiones à la HB' de φ sobre W. Para $U \leq W$ sea $\theta_U^W : \hat{W}' \to \hat{U}'$ la función restricción. Entonces $(\hat{W}', \theta_U^W)_{U,W\in I}$ es una familia inversa de conjuntos. Nótese que $\hat{W}' \neq \emptyset$, $\forall W \in I$—ver Corolario 1.3.

Por otro lado, si tomamos los conjuntos $(\mathcal{P}(\hat{W}'))_{W\in I}$ con las funciones $\eta_{UW} : \mathcal{P}(\hat{U}') \to \mathcal{P}(\hat{W}')$, $U \leq V$, $\eta_{UW}(Q) = (\theta_U^V)^{-1}(Q)$, puede verse que $(\mathcal{P}(\hat{W}'), \eta_{UW})$ es una familia dirigida de álgebras booleanas. Podemos formar $B = \lim_{\to} \mathcal{P}(\hat{W}')$ y tomar sobre B una medida m. Ahora, m induce a una familia coherente de medidas (m_W) en $(\mathcal{P}(\hat{W}'), \eta_{UW})$ haciendo $m_W(Q) = m(\bar{Q})$. Usando la medida m_W podemos definir la integral $\int f \; dm_W$ para cada función $f : \hat{W}' \to R$ acotada, $W \in I$.

Sea $x \in E$. Defínase $W_x = gen\{V \cup \{x\}\}$, y $\varepsilon_x : \hat{W}'_x \to R$ la función de evaluación, $\varepsilon_x(\psi) = \psi(x)$. Como para todo ψ en $\hat{W}'_x$ se tiene $\psi(x) \leq p(x)$, $\psi(-x) \leq p(-x)$ (luego $\psi(x) \geq -p(-x)$), entonces ε_x es acotada. Defínase

$$\Phi(x) = \int \varepsilon_x \; dm_{W_x}$$

Ahora, nótese que para $W_x \leq W$ también hay una función de evaluación $\bar{\varepsilon}_x : \hat{W}' \to R$, y que $\bar{\varepsilon}_x = \varepsilon_x \circ \theta_{W_x}^W$; gracias a la coherencia de las medidas (m_W), se tiene

$$\int \bar{\varepsilon}_x \; dm_W = \int \varepsilon_x \; dm_{W_x} = \Phi(x).$$

En particular, para $x, y \in E$, haciendo $W = gen\{V \cup \{x, y\}\}$, tenemos

$$\Phi(x) + \Phi(y) = \int \bar{\varepsilon}_x \; dm_W + \int \bar{\varepsilon}_y \; dm_W = \int \bar{\varepsilon}_{x+y} \; dm_W = \Phi(x+y)$$

Teorema 3.12 *Sea H espacio de Hilbert, $C \subseteq H$ cerrado, convexo. Entonces para cada $x \in H$ existe un único $u \in C$, llamado $p_C x$, con*

$$\| x - p_C x \| = \inf_{v \in C} \| x - v \|$$

Además, $p_C x$ está caracterizado en C por la ecuación

$$\langle x - p_C x, v - p_C x \rangle \leq 0, \ \forall v \in C$$

Demostración: Sea $d = \inf_{v \in C} \| x - v \|$. Para $n \in \mathcal{N}$, sea $D_n = C \cap \bar{B}(x, d + 1/n)$. D_n es cerrado, convexo y no vacío, y $D_1 \supseteq D_2 \supseteq D_3 \supseteq \ldots$ La convexidad uniforme de H muestra que $\lim_{n \to \infty} \text{diam} D_n = 0$ de la siguiente manera: supóngase que $\text{diam} D_n \geq 2\alpha > 0$, $\forall n \in \mathcal{N}$. Entonces existen $x_n, y_n \in D_n$, $\| x_n - y_n \| > \alpha$, $\forall n \in \mathcal{N}$. Sean $x'_n = \frac{x_n - x}{d + 1/n}$, $y'_n = \frac{y_n - x}{d + 1/n}$ en B_H. Así,

$$\| x'_n - y'_n \| > \frac{\alpha}{d + 1/n} \geq \frac{\alpha}{d+1}, \text{ y } \| z \| \geq \frac{d}{d + 1/n}, \ \forall z \in \frac{1}{d + 1/n}(D_n - x), \ \forall n \in \mathcal{N}$$

Por la convexidad uniforme de H existe $\delta > 0$ t.q.

$$\forall h_1, h_2 \in B_H : \| h_1 - h_2 \| > \frac{\alpha}{d+1} \Rightarrow \left\| \frac{h_1 + h_2}{2} \right\| \leq 1 - \delta$$

Para $n \in \mathcal{N}$ con $1 - \delta < \frac{d}{d + 1/n}$ llegamos a una contradicción por la convexidad de $\frac{1}{d + 1/n}(D_n - x)$, y así $\lim_{n \to \infty} \text{diam} D_n = 0$.

La completitud de H garantiza que $\bigcap_{n \in \mathcal{N}} D_n \neq \emptyset$; de hecho, $\bigcap_{n \in \mathcal{N}} D_n$ consta de un solo elemento $u \in C$, que cumple con lo que buscamos.

Para la caracterización de $p_C x$ ver Brézis, V.1.

Nota: en el caso de $M \leq H$ cerrado, la caracterización de $p_M x$ toma la forma

$$\langle x - p_M x, v \rangle = 0, \ \forall v \in M.$$

Recordamos que H' se define como el conjunto de las funciones reales lineales contínuas sobre H. La suma, multiplicación y norma usuales en H' definen un espacio vectorial normado.

Teorema 3.13 (Representación de Riesz-Fréchet) *Sea H espacio de Hilbert. Considere la función $\tau : H \to H'$, $\tau_x(h) = \langle x, h \rangle$. Entonces τ es una isometría lineal.*

Demostración: Es claro que τ está bien definida – la continuidad de τ_x está garantizada por la desigualdad de Cauchy-Schwarz. si $\tau_{x_1} = \tau_{x_2}$, entonces en particular $\langle x_1, x_1 - x_2\rangle = \langle x_2, x_1 - x_2\rangle$, luego $x_1 = x_2$ (en general, para H espacio de Hilbert se tiene

$$f(x) = 0,\ \forall f \in H' \Rightarrow x = 0$$

para todo $x \in H$. Esto no es claro en absoluto para E espacio vectorial normado arbitrario!)

Puede verse también que τ lineal, y $\| \tau_x \| = \| x \|$, $x \in H$. En cuanto a la sobreyectividad, sea $\varphi \in H'$. Entonces $M = \varphi^{-1}(0) \leq H$ cerrado. Si $M = H$, entonces $\varphi = \tau_0$. Si no, sea $y \in H - M$, y $x = (y - p_M y)/\ \| y - p_M y \|$. Se tiene $\| x \| = 1, \langle x, v\rangle = 0,\ \forall v \in M$. Resulta que M y gen$\{x\}$ son suplementarios: su intersección es trivial, y

$$\forall h \in H:\ h = \frac{\varphi(h)}{\varphi(x)}x + \left(h - \frac{\varphi(h)}{\varphi(x)}x\right) \in \text{gen}\{x\} + M$$

Además,

$$\langle x, h\rangle = \left\langle x, \frac{\varphi(h)}{\varphi(x)}x\right\rangle = \frac{\varphi(h)}{\varphi(x)}$$

y así $\varphi = \tau_{\varphi(x)x}$.

Teorema 3.14 *Para H espacio de Hilbert, la función $\varepsilon : H \to H''$, $\varepsilon_x(\varphi) = \varphi(x)$, es una isometría lineal. En particular, todo espacio de Hilbert es reflexivo.*

Demostración: Para τ_x, τ_y en H', sea $\langle \tau_x, \tau_y\rangle = \langle x, y\rangle$. Entonces $(H', \langle,\rangle)$ es de Hilbert, y el producto interno $\langle,\rangle$ genera la norma usual en H'. Además la función $\tau' : H' \to H''$, $\tau'_\varphi(\psi) = \langle \varphi, \psi\rangle$ es isometría lineal. Pero para $x \in H$,

$$(\tau' \circ \tau)_x(\tau_y) = \tau'_{\tau_x}(\tau_y) = \langle x, y\rangle = \varepsilon_x(\tau_y),\ \forall \tau_y \in H'.$$

Finalmente, me parece importante mostrar que, en ZF, $(\mathcal{R}^n, \circ)$ es un espacio de Hilbert. Para esto sólo falta ver que $\mathcal{R}^n$ es completo con la métrica usual.

Lema 3.15 $I = [0,1]$ *es compacto en* $\mathcal{R}$.

(ver Rudin, 1953, 2.38-2.40)

Demostración: Sea $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ recubrimiento abierto de I, y supóngase que no existe ningún subrecubrimiento finito de I. Entonces por lo menos uno de los intervalos $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2}, 1]$ no puede cubrirse con finitos abiertos en $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. Sea I_1 aquel que tenga esta propiedad *–si ambos la tienen, escójase el que está más a la izquierda, es decir* $[0, \frac{1}{2}]$. Sean $a_1 < b_1$ los extremos de I_1, y repítase el procedimiento dividiendo I_1 en forma similar, etc. Se generan así dos sucesiones $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$ y $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \ldots$ t.q. $|b_n - a_n| = \frac{1}{2^n}$, y $[a_n, b_n]$ no puede cubrirse con finitos abiertos, para todo $n \in \mathcal{N}$. Sea $\alpha = \sup_{n\in\mathcal{N}} a_n = \inf_{n\in\mathcal{N}} b_n$ en I. Cubriendo α con U_λ abierto, $\lambda \in \Lambda$, obtenemos una contradicción.

Corolario 3.16 $[\mathbf{c}, \mathbf{d}] = [c_1, d_1] \times \ldots \times [c_n, d_n]$ *es compacto en* $\mathcal{R}^n$*, para* $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathcal{R}^n$, $c_i \leq d_i$.

Demostración: La prueba del lema anterior puede llevarse a cabo para $[c_i, d_i]$ de la misma forma que para $[0, 1]$. El intervalo $[\mathbf{c}, \mathbf{d}]$ es entonces el producto de n espacios topológicos compactos — nótese que no se hace uso del axioma de elección para mostrar que un producto finito de espacios compactos es compacto.

Lema 3.17 $\mathcal{R}^n$ *es completo**.

Demostración: Sea $A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \ldots$ colección de cerrados no vacíos en $\mathcal{R}^n$, con $\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam} A_n = 0$. Entonces existen $\mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathcal{R}^n$, y $n_0 \in \mathcal{N}$ t.q. $A_n \subseteq [\mathbf{c}, \mathbf{d}]$, $\forall n \geq n_0$. Así, $A_{n_0} \supseteq A_{n_1} \supseteq \ldots$ es una sucesión decreciente de compactos no vacíos, por lo que

$$\bigcap_{n\geq n_0} A_n = \bigcap_{n\in\mathcal{N}} A_n \neq \emptyset.$$

Nota: la bibliografía sobre este tema parece ser muy escasa. Sin embargo, se recomienda al lector el libro de Carlo Miranda (1978),[3] en donde se muestra en particular un resultado (Teo. 10.I) que en nuestro contexto puede interpretarse así:

Lema 3.18 *En ZF se tiene, para X espacio métrico separable,*

$$X \text{ completo} \Longleftrightarrow X \text{ completo}^*$$

[3] Carlo Miranda, *Istituzioni di Analisi Funzionale Lineare*, Unione Matematica Italiana, 1978.

3.4 Centro de masa

"Si Newton et Leibniz avaient pensé que les fonctions continues n'ont pas nécessairement de derivée, le calcul différentiel n'aurait jamais vu le jour."

Emile Picard

En esta sección, al igual que en la anterior, se demuestran resultados que se usarán en la sección 3.5.

Sean $(H, \langle , \rangle)$ espacio de Hilbert, $C \subseteq H$ acotado, y m medida en $\mathcal{P}(C)$. Entonces el operador

$$\int_C \mathrm{d}m : H' \to \mathcal{R}$$

es lineal, y como existe $M \geq 0 : \; C \subseteq B_H(0, M)$, entonces para $f \in H', \| f \| \leq 1$,

$$\left| \int_C f \, \mathrm{d}m \right| \leq \int_C |f| \, \mathrm{d}m \leq \int_C M \, \mathrm{d}m = M$$

así que $\int_C \mathrm{d}m \in H''$. Por la reflexividad de H, existe un único $x \in H$ con

$$\int_C f \, \mathrm{d}m = f(x), \; \forall f \in H'$$

Teorema 3.19 *Sean$(H, \langle , \rangle)$ espacio de Hilbert, $C \subseteq H$ convexo, cerrado y acotado, y m medida en $\mathcal{P}(C)$. Entonces el vector $x \in H$ con $\varepsilon_x = \int_C \mathrm{d}m \in H''$ pertenece a C.*

Demostración: Supongamos $x \notin C$. Como C cerrado, convexo, podemos formar la proyección de x sobre C, es decir $p_C x \in C$ con

$$\langle x - p_C x, y - p_C x \rangle \leq 0, \; \forall y \in C$$

Sea $v = p_C x - x \neq 0$. Considérese la función $\theta : H \to \mathcal{R}$, $\theta(y) = \langle v, y - p_c x \rangle$. Tenemos entonces $\theta(x) < 0$, $\theta(y) \geq 0 \; \forall y \in C$, $\theta(p_C x) = 0$. Como C es convexo y acotado, θ afín, entonces $D = \theta(C)$ es convexo y acotado, es decir $D = [0, a)$ ó $D = [0, a]$, $a \in \mathcal{R}$. Podemos definir una medida m' en $\mathcal{P}(D)$ según

$$m'(U) = m(\theta|_C^{-1}(U)), \; U \subseteq D$$

Vemos que las medidas m, m' son compatibles respecto a $\theta|_C$ en el sentido del Lema 3.9. Usando este lema obtenemos

$$\int_D \imath \, \mathrm{d}m' = \int_C \imath \circ \theta \, \mathrm{d}m = \int_C \theta \, \mathrm{d}m,$$

y como

$$0 \leq \int_D \imath \, \mathrm{d}m' \leq \int_D a \, \mathrm{d}m' = a$$

entonces $\int_C \theta \, \mathrm{d}m \in [0, a]$. Pero la función $\theta(y) + \langle v, p_C x \rangle = \langle v, y \rangle$ es lineal continua; se sigue

$$\int_C \theta \, \mathrm{d}m + \langle v, p_C x \rangle = \int_C \theta + \langle v, p_C x \rangle \, \mathrm{d}m = \theta(x) + \langle v, p_C x \rangle$$

luego $\int_C \theta \, \mathrm{d}m < 0$, contradicción.

We claim that

El vector $x = \varepsilon^{-1}(\int_C \, \mathrm{d}m)$ puede interpretarse en un sentido físico como el centro de masa de C inducido por la distribución de masa m. En efecto, sean $\pi = \{A_1, A_2, \ldots A_n\}$ partición de C, $a_i \in A_i$, $i = 1 \ldots n$, y defínase $|\pi| = max_{i=1 \ldots n} \mathrm{diam} A_i$. Entonces una aproximación del centro de masa de C está dada por el vector

$$y = \frac{1}{m(C)}(m(A_1)a_1 + \ldots + m(A_n)a_n) = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)a_i$$

y $|\pi|$ es una medida de la exactitud en la aproximación. El siguiente teorema afirma no solamente que estas aproximaciones convergen, sino que lo hacen hacia el punto que nos interesa.

Teorema 3.20 *Sean H espacio de Hilbert, $C \subseteq H$ acotado, m medida en $\mathcal{P}(C)$ y $x \in H$ como arriba. Entonces*

$$\lim_{|\pi| \to 0} \sum_{i=1}^{n} m(A_i)a_i = x$$

Demostración: Sea $\pi = \{A_1, A_2, \ldots A_n\}$ partición, $a_i \in A_i$, $i = 1 \ldots n$, y suponga $|\pi| < \varepsilon$. Sea $y = \sum_{i=1}^{n} m(A_i)a_i$. Para $\varphi \in H'$, $\|\varphi\| \leq 1$,

$$\varphi(x) = \int_C \varphi \, \mathrm{d}m = \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} \varphi \, \mathrm{d}m$$

Para i fijo, tenemos $|\varphi(a_i) - \varphi(z)| \leq \| a_i - z \| < \varepsilon$, para todo $z \in A_i$, y así

$$m(A_i)\varphi(a_i) - m(A_i)\varepsilon \leq \int_{A_i} \varphi \, \mathrm{d}m \leq m(A_i)\varphi(a_i) + m(A_i)\varepsilon$$

Sumando sobre $i = 1 \ldots n$,

$$\sum_{i=1}^{n} m(A_i)\varphi(a_i) - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^{n} \int_{A_i} \varphi \, \mathrm{d}m \leq \sum_{i=1}^{n} m(A_i)\varphi(a_i) + \varepsilon$$

y por la linealidad de φ,

$$\varphi(y) - \varepsilon \leq \varphi(x) \leq \varphi(y) + \varepsilon, \ \forall \varphi \in B_{H'}$$

Esto implica necesariamente que $\| x - y \| \leq \varepsilon$.

A la luz del Teorema 3.20, la convexidad de C parece una condición necesaria en las hipótesis del Teorema 3.19. Al mismo tiempo la clausura de C parece una condición innecesaria: parece claro que cualquier distribución de masa en un conjunto convexo acotado C debe tener un centro de masa dentro de C! En este sentido el lector podrá encontrar paradójico el próximo teorema.

Dado X espacio topológico, y F ultrafiltro sobre $\mathcal{P}(X)$, llamamos el *límite* de F al conjunto $\bigcap_{U \in F} \bar{U}$.

Lema 3.21 (en ZF+IBP) *Para X espacio topológico, X es compacto ssi todo ultrafiltro sobre $\mathcal{P}(X)$ tiene límite distinto de vacío.*

Demostración: Sea X compacto, y F ultrafiltro sobre $\mathcal{P}(X)$. Como F tiene la propiedad de intersecciónes finitas (pif), entonces $\{\bar{U} | \, U \in F\}$ también tiene esta propiedad, y así por compacidad el límite es distinto de vacío. Recíprocamente, suponga que X es tal que todo ultrafiltro sobre $\mathcal{P}(X)$ tiene límite no vacío, y sea $\{C_i\}_{i \in I}$ colección pif de cerrados en X. Podemos extender esta familia para formar un filtro (ver 1.1), y éste a su vez a un ultrafiltro F gracias al teorema del ideal booleano primo. Pero entonces

$$\bigcap_{i \in I} C = \bigcap_{i \in I} \bar{C} \supseteq \bigcap_{U \in F} \bar{U} \neq \emptyset.$$

Teorema 3.22 (en ZF+IBP) *Sea H espacio de Hilbert, y $C \subseteq H$ acotado, convexo y abierto. Entonces existe una medida m sobre $\mathcal{P}(C)$ tal que el centro de masa de C inducido por m está fuera de C.*

Demostración: Sea $c \in C$ fijo, $c \neq 0$, y $V = gen\{c\}$. Sea $A = C \cap V$. Entonces A no es cerrado, pues

$$a = sup\{\alpha \in \mathcal{R} | \, \alpha c \in C\} \cdot c \notin C$$

y a está en la frontera de A—si $a \in C$, entonces extistiría $\varepsilon > 0$ t.q. $B(\varepsilon, a) \subseteq C$, y $a + \frac{\varepsilon}{2\|c\|} c \in C$, contradicción. De esta forma A no es compacto como subespacio topológico de H, y existe F ultrafiltro sobre $\mathcal{P}(A)$ tal que el límite de F es vacío. No obstante F define una medida en C,

$$m(U) = \begin{cases} 1, & U \cap A \in F \\ 0, & U \cap A \notin F \end{cases}$$

(el lector puede verificar que m es una medida), y como C es acotado, el centro de masa $x = \varepsilon^{-1}(\int_C \mathrm{d}m)$ está bien definido. Mostraremos en dos partes que x no puede estar contenido en C.

i) Suponga $x \in C - A$. Entonces $x \notin V$; sea $v = x - p_V x$, y $\gamma(y) = \langle v, y\rangle$. Tenemos

$$\int_C \gamma \,\mathrm{d}m = \gamma(x) = \langle v, x\rangle = \langle v, x\rangle - \langle v, p_V x\rangle = \| v \|^2 > 0$$

y por otro lado

$$\int_C \gamma \,\mathrm{d}m = \int_{C-A} \gamma \,\mathrm{d}m + \int_A \gamma \,\mathrm{d}m = 0, \text{ contradicción.}$$

ii) Suponga ahora $x = \beta c \in A$. Se va a mostrar que x es elemento del límite de F después de todo: para $U \in F$, supóngase que la clausura de U en A no contiene a x; entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $(\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon) \cdot c \cap U = \emptyset$. Ahora, $U = U_1 \cup U_2$, donde $U_1 = U \cap (-\infty, \beta - \varepsilon] \cdot c$, $U_2 = U \cap [\beta + \varepsilon, \infty) \cdot c$, y como F es ultrafiltro, $U_1 \in F$ ó $U_2 \in F$. Sea $U_2 \in F$ (el otro caso es similar), y sea ahora $\delta(y) = \langle c, y\rangle$. Se tiene

$$\int_C \delta \,\mathrm{d}m = \delta(x) = \beta\langle c, c\rangle$$

y por otro lado

$$\int_C \delta \,\mathrm{d}m = \int_{U_2} \delta \,\mathrm{d}m \geq (\beta + \varepsilon)\langle c, c\rangle, \text{ contradicción.}$$

Así $x \in \bigcap_{U \in F} \bar{U}$, contradicción.

El lector podrá sacar sus propias conclusiones sobre los motivos por los que este resultado se antoja tan contraintuitivo.

3.5 Elección coherente en espacios vectoriales

Se entenderá por espacio ***hilbertible*** un espacio vectorial topológico H para el cual existe un producto interno compatible con la topología que lo convierte en un espacio de Hilbert. Si H es un espacio hilbertible, diremos que $C \subseteq H$ es *acotado* si C es acotado en $(H, \langle,\rangle)$ para algún producto interno compatible $\langle,\rangle$. Si C acotado en $(H, \langle,\rangle_1)$, y $\langle,\rangle_2$ es cualquier otro producto interno compatible, entonces la función identidad $i : (H, \langle,\rangle_1) \to (H, \langle,\rangle_2)$ es lineal continua, y así $i(C) = C$ es acotado en $(H, \langle,\rangle_2)$. De esta manera no es importante la elección particular del producto interno en la definición.

Dado H hilbertible, $C \subseteq H$ convexo, cerrado y acotado, m medida en $\mathcal{P}(C)$, existe un único $x_0 \in C$ t.q. si $\langle , \rangle$ producto interno *arbitrario*, x_0 corresponde a $\int \mathrm{d}m$ en $(H, \langle , \rangle)$: pues si x_1, x_2 inducidos por $\langle , \rangle_1$, $\langle , \rangle_2$ respectivamente, entonces

$$f(x_1) = \int_C f \,\mathrm{d}m = f(x_2),\ \forall f \in H'$$

luego $x_1 = x_2$.

Lema 3.23 *Sean H, V espacios hilbertibles, $C \subseteq H$, $D \subseteq V$ convexos, cerrados, acotados, μ, ν medidas en $\mathcal{P}(C)$, $\mathcal{P}(D)$ resp., y $\gamma : H \to V$ lineal contínua. Supóngase además que $\gamma(C) \subseteq D$, y que μ, ν coherentes respecto a γ. Si $x \in C$, $y \in D$ son tales que $\varepsilon_x = \int_C \mathrm{d}\mu$, $\varepsilon_y = \int_D \mathrm{d}\nu$, entonces $\gamma(x) = y$.*

Demostración: Para todo $f \in V'$ se cumple

$$f(y) = \int_D f \,\mathrm{d}\nu = \int_C f \circ \gamma \,\mathrm{d}\mu = (f \circ \gamma)(x) = f(\gamma(x)).$$

Enunciamos ahora el axioma

> **ACC hilbertible:** Sea $(H_i, \gamma_i^j)_{i,j \in I}$ familia inversa de espacios hilbertibles (γ_i^j lineal contínua, para cada $i \leq j$), $(C_i)_{i \in I}$, $C_i \subseteq H_i$, colección de subconjuntos convexos, cerrados, acotados, $(C_i)_{i \in I}$ coherente (es decir, $\gamma_i^j(C_j) \subseteq C_i$). Entonces
> $$\varprojlim C_i \neq \emptyset$$

Teorema 3.24 *La existencia de medidas en álgebras booleanas implica ACC hilbertible.*

Demostración: Considere la familia directa $(\mathcal{P}(C_i), \delta_{ij})_{i,j \in I}$, $\delta_{ij}(U) = \gamma_i^{j-1}(U)$, $U \subseteq C_i$. En $B = \lim_{\rightarrow} \mathcal{P}(C_i)$ defínase m medida con $m(1) = 1$; m induce a una colección $(m_i)_{i \in I}$ coherente de medidas. Para cada $i \in I$, encuéntrese $x_i \in C_i$ correspondiente a $\int_{C_i} \mathrm{d}m_i$ en H_i. El lema anterior garantiza que $(x_i)_{i \in I} \in \lim_{\leftarrow} C_i$.

Nótese que todo espacio vectorial V de dimensión finita tiene una topología natural asociada, a saber, la topología inducida por una norma arbitraria sobre V (cualesquiera dos normas sobre V son equivalentes, e inducen la misma topología). Nótese además que para V, W de dimension finita, toda función lineal $f : V \to W$ es automáticamente contínua con las topologías naturales asociadas. Por último, es obvio que todo espacio vectorial de dimensión finita es hilbertible.

Teorema 3.25 *ACC hilbertible implica la siguiente afirmación, llamada ACC lineal:*

Sea $(V_i, \gamma_i^j)_{i,j\in I}$ familia inversa de espacios vectoriales de dimensión finita, $(C_i)_{i\in I}$, $C_i \subseteq V_i$, colección coherente de subconjuntos convexos cerrados acotados. Entonces

$$\varprojlim C_i \neq \emptyset$$

Nótese que ACC lineal es una forma debilitada de ACC compacto Hausdorff: en tales espacios ser cerrado y acotado equivale a ser compacto, y los conjuntos $(C_i)_{i\in I}$, además de ser compactos, deben ser *convexos*; los espacios $(H_i)_{i\in I}$ se convierten en un marco para poder definir la convexidad.

Teorema 3.26 *ACC lineal implica HB.*

Demostración: Haremos una prueba muy similar a la del Teorema 2.4. Dadas las hipótesis de HB, sea $I = \{F \leq E | \dim F < \infty\}$, I ordenado por inclusión, y sea $A_F = F'$, γ_F^G función restricción. Además sea $C_F = \{f \in F' | f = \varphi \text{ en } F \cap V,\ f \leq p \text{ en } F\}$. Es cuestión de rutina verificar que $(F', \gamma_F^G)_{F\in I}$ es una familia inversa de espacios vectoriales de dimensión finita, $\{C_F\}$ coherente. De la misma forma que en el Teorema 2.4, mostramos que los conjuntos C_F son cerrados y acotados, pero ahora observamos también que son convexos: para $f, g \in C_F$, $\lambda \in [0,1]$, tenemos para todo $x \in F \cap V$: $\lambda f(x) + (1-\lambda)g(x) = \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(x) = \varphi(x)$, y para todo $y \in F$: $\lambda f(y) + (1-\lambda)g(y) \leq \lambda p(x) + (1-\lambda)p(x) = p(x)$. Gracias al axioma de elección coherente en espacios de dimensión finita encontramos $(f_F)_{F\in I}$ coherente. La función $\Phi : E \to \mathcal{R}$ definida según $\Phi(x) = f_F(x)$, $x \in F$ está bien definida por coherencia, y claramente es una extensión lineal de ϕ acotada por p.

Corolario 3.27 *Son equivalentes:*

i) *El teorema de Hahn-Banach*

ii) *ACC hilbertible*

iii) *ACC lineal*

Aunque técnicamente innecesario, el siguiente teorema muestra como ACC lineal puede verse como una generalización de ACC difuso finito.

Teorema 3.28 *ACC lineal implica ACC difuso finito.*

Demostración: Dada $(A_i, f_i^j)_{i,j\in I}$ familia inversa de conjuntos finitos, considere la familia $(\mathcal{R}^{A_i})_{i\in I}$, y para $i \in I$ al conjunto

$$C_i = \{\alpha \in \mathcal{R}^{A_i} | \alpha \text{ elección difusa}\}$$

Entonces C_i es convexo, cerrado y acotado en $\mathcal{R}^{A_i}$—pensar en el simplejo generado por $e_1, e_2, \ldots$ en $\mathcal{R}^n$. Ahora las funciones $(f_i^j)_{i\in I}$ inducirán funciones lineales $(\gamma_i^j)_{i\in I}$ por medio de la base $\{\hat{a}|a \in A_i\}$, donde $\hat{a}(a) = 1,\ \hat{a}(b) = 0\ \forall b \neq a$. Definimos

$$\gamma_i^j\left(\sum_{a\in A_j} k_a \hat{a}\right) = \sum_{a\in A_j} k_a \widehat{f_i^j(a)}$$

Es fácil ver, por construcción, que $\gamma_i^j(C_j) \subseteq C_i$. La elección coherente $(\alpha_i)_{i\in I}$ en $(\mathcal{R}^{A_i}, \gamma_i^j)_{i,j\in I}$ también es coherente en $(A_i, f_i^j)_{i\in I}$ en el sentido de la Definición 3.3.

Aunque ACC lineal resulta ser más útil en la práctica que ACC hilbertible, la siguiente es una aplicación directa de éste último.

Teorema 3.29 (HB) *Sea H espacio de Hilbert, y sea $(D_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ colección de conjuntos cerrados, convexos y acotados en H con la propiedad de intersección finita. Entonces $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda \neq \emptyset$.*

Demostración: Considere el conjunto I formado por por los subconjuntos finitos no vacíos de Λ, ordenado por inclusión. Para $i \in I$ sea $H_i = H$, $C_i = \bigcap_{\lambda\in i} D_\lambda$. Puede verse que $C_i \subseteq H$ es cerrado, convexo y acotado, y que la familia inversa $(H, \iota)_I$, junto con la familia de conjuntos $(C_i)_{i\in I}$, cumple con las hipótesis de ACC hilbertible. Pero entonces la elección coherente $(c_i)_{i\in I}$ constará de un sólo elemento $c \in \bigcap_{i\in I} C_i \subseteq \bigcap_{\lambda\in\Lambda} D_\lambda$.

En espacios de dimensión finita sabemos que toda colección p.i.f. de cerrados acotados tiene intersección no vacía, gracias a que todo cerrado acotado es compacto. El teorema anterior generaliza ese resultado a espacios de Hilbert arbitrarios, imponiendo la condición adicional de convexidad.

Teorema 3.30 (HB) *Sea E un espacio vectorial normado, y sea $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una colección de funciones arbitrarias, $\varphi_\lambda : E \to \mathcal{R}$, tal que para todo $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ existe $f \in B_{E'}$ con $f \leq \varphi_{\lambda_i}$, $i = 1\ldots n$. Entonces existe $h \in B_{E'}$, $h \leq \varphi_\lambda$, $\forall \lambda \in \Lambda$.*

Demostración: Sea $I = \{(F, \{\lambda_1, \ldots \lambda_n\})|\ F \leq E,\ \dim F < \infty,\ \lambda_1, \ldots \lambda_n \in \Lambda,\ n > 0 \in \mathcal{N}\}$. Sea $(F, \{\lambda_1, \ldots \lambda_n\}) \leq (G, \{\mu_1, \ldots \mu_m\})$ si $F \leq G$ y $\{\lambda_1, \ldots \lambda_n\} \subseteq \{\mu_1, \ldots \mu_m\}$. Entonces $(I, \leq)$ orden parcial dirigido. Para $i = (F, \{\lambda_1, \ldots \lambda_n\})$, sea $V_i = F'$, y sea $\gamma_i^j : V_j \to V_i$ la función restricción. Así, puede verse que $(V_i, \gamma_i^j)_{i\in I}$ es una familia inversa de espacios vectoriales de dimensión finita. Para $i = (F, \{\lambda_1, \ldots \lambda_n\}) \in I$ sea

$$C_i = \{f \in F'|\ \|f\| \leq 1,\ f \leq \varphi_{\lambda_k},\ k = 1\ldots n\}$$

Del Teorema 3.29 se deduce (aplicando ACC hilbertible) que todo cerrado, convexo, acotado en un espacio de Hilbert es convexo-compacto. Ahora ACC lineal nos proporcionará un resultado análogo en el espacio dual de cualquier espacio vectorial normado.

Teorema 3.33 (Alaoglu convexo-compacto, ALC)(HB) *Para E espacio vectorial normado, la bola unitaria en E' es convexa-compacta en la topología $\sigma(E', E)$.*

Demostración: Sea $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}, C_\lambda \subseteq E'$, familia de conjuntos convexos cerrados en $\sigma(E', E)$ tales que $\{B_{E'} \cap C_\lambda\}$ es pif. Nótese que $B_{E'}$ es convexa y cerrada en $\sigma(E', E)$; por esto podemos suponer que $C_\lambda \subseteq B_{E'}$, $\{C_\lambda\}$ pif. Para cada $\lambda \in \Lambda$, sea $\varphi_\lambda = \sup_{f\in C_\lambda} f$.

Como $\{C_\lambda\}$ es pif, $C_\lambda \subseteq B_{E'}$, la colección $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ cumple con las hipótesis del Teorema 3.30, y por éste teorema existe $f \in B_{E'}$ tal que $f \leq \varphi_\lambda$, $\forall\lambda \in \Lambda$, y así $f \in C_\lambda$, $\forall\lambda \in \Lambda$.

Corolario 3.34 (HB) *Para E espacio vectorial normado, todo subconjunto cerrado, convexo, acotado de E' es convexo-compacto en la topología $\sigma(E', E)$.*

Demostración: Es claro que el teorema anterior puede extenderse a bolas con centro en el origen de radio arbitrario en E'. Por otro lado, es fácil ver que todo subconjunto cerrado convexo de un conjunto convexo-compacto—en un espacio vectorial topológico arbitrario—es también convexo-compacto. Combinando ambas observaciones se obtiene el resultado.

Hacemos notar que, en un espacio de Hilbert H, todo conjunto convexo-compacto en la topología débil estrella (identificando H con H'') es también convexo-compacto en la topología fuerte. Para esto es suficiente observar que todo $C \subseteq H''$ convexo cerrado fuertemente es cerrado en $\sigma(H'', H''')$, y por tanto cerrado en $\sigma(H'', H')$ ya que H' es reflexivo. Así demostramos, usando ACC lineal, que todo conjunto convexo, cerrado, acotado en un espacio de Hilbert es fuertemente convexo-compacto. De hecho, es fácil ver que esta afirmacion implica el Teorema 3.29.

La prueba de "ALC implica HB"puede consultarse en Luxemburg (1969).

Capítulo 4

HB y la paradoja de Banach-Tarski

"Mais il serait une grave erreur de penser qu'on peut trouver la certitude seulement dans les démonstrations géometriques ou dans le témoignage des sens."

A.L. Cauchy

Parece haber en las matemáticas teóricas pocos resultados tan patentemente contraintuitivos como la llamada paradoja de Banach-Tarski, que afirma en su forma más simple que la bola unitaria en $\mathcal{R}^3$ puede descomponerse en finitas partes que, reacomodadas adecuadamente usando sólo rotaciones y traslaciones, se reúnen formando dos bolas idénticas a la bola original. Desde su demostración en 1924, este resultado ha generado una fuerte controversia, que ha llegado a poner en tela de juicio al mismo sistema axiomático ZFC —las hipótesis del teorema, por decirlo de alguna manera—, y en especial a la oveja negra del sistema axiomatico, AC. Es justamente este tipo de resultados lo que puede motivar a remplazar AC por un axioma más débil de elección, con la esperanza de que las matemáticas así obtenidas se ajusten mas a la intuición (lo que sea que esto signifique). Prefiero pensar en la 'paradoja' de Banach-Tarski como una elegante aplicación de los métodos algebráicos en la geometría, y como un ejemplo de la limitada intuición que tenemos sobre los subconjuntos arbitrarios de $\mathcal{R}^3$; ver Wagon (1994).

En esta sección se hará una concisa exposición de este resultado, usando como referencia los capítulos 1-3 de Wagon (1994). Se tendrá especial cuidado en no usar el axioma de elección salvo cuando se mencione explícitamente, y concluiremos con un teorema de Pawiikowski (1991) que muestra que Banach-Tarski es una consecuencia de ZF+HB.

Comenzamos por describir la cualidad 'paradójica' que usaremos, en un contexto adecuadamente general.

Definición 4.1 Considere al grupo G actuando sobre el conjunto X, y sea $E \subseteq X$. Decimos que E es *G-paradójico* si existen $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m \subseteq E$ disyuntos dos a dos, y $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m \in G$ tales que $E = \bigcup_{i=1}^{n} g_i A_i$, y $E = \bigcup_{i=1}^{m} h_i B_i$.

nota: $g_i A_i$ puede intersectarse

En términos de esta definición, se demostrará que si G_3, el grupo de isometrías de $\mathcal{R}^3$, actúa sobre $\mathcal{R}^3$ en forma natural, entonces la bola unitaria es G_3-paradójica. Más adelante se mostrará que si E es G-paradójico, entonces pueden encontrarse testigos $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m \subseteq E, g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m \in G$ tales que tanto $\{A_i, B_i\}$ como $\{g_i A_i\}$ y $\{h_i B_i\}$ son particiones de E. Teniendo esto, el resultado enunciado se sigue fácilmente.

Lema 4.2 *F_2, el grupo libre de dos generadores, es paradójico actuando sobre sí mismo bajo multiplicación por la izquierda.*

Demostración: Sean a, b las letras generadoras de F_2. Sean $W(a), W(b), W(a^{-1})$, $W(b^{-1})$ los conjuntos formados por las palabras reducidas que comienzan por a, b, a^{-1}, b^{-1} respectivamente. Para ver que $W(a) \cup aW(a^{-1}) = F_2$, nótese que si $r_1 \ldots r_n$ es una palabra reducida que no comienza por a, $n \geq 0$, entonces $a^{-1} r_1 \ldots r_n$ también es una palabra reducida, y $r_1 \ldots r_n = aa^{-1} r_1 \ldots r_n \in aW(a^{-1})$. Similarmente con $W(b), W(b^{-1})$.

Diremos simplemente que un grupo es paradójico si lo es sobre sí mismo en la manera descrita. Además se recuerda que un grupo G actúa *libremente* sobre X si $gx \neq x$, para todo $g \neq e$ y x en X (se refiere al lector a Fraleigh, *Algebra Abstracta*, cap. 16, para una breve introducción a las acciones de grupo).

Teorema 4.3 (AC) *Suponga que G actúa libremente sobre X, y que G es paradójico. Entonces X es G-paradójico.*

Demostración: Dados A, B subconjuntos disyuntos de G, y $x \in X$, tenemos que Ax y Bx son disyuntos por la acción libre de G sobre X. Sea $(x_i)_{i \in I}$ una colección de representantes de las orbitas de X con respecto a G, $I = X/G$ (aquí usamos fuertemente el axioma de elección), y $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m \subseteq G$, $g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m \in G$ testigos de la paradojicidad (?) de G. Defínanse $A'_k = \bigcup_{i \in I} A_k x_i$, $B'_k = \bigcup_{i \in I} B_k x_i$. Evidentemente los A'_k, B'_k son disyuntos entre sí; además

$$\bigcup_{k=1}^{n} g_k A'_k = \bigcup_{k=1}^{n} g_k \bigcup_{i \in I} A_k x_i = \bigcup_{i \in I} \bigcup_{k=1}^{n} g_k A_k x_i = \bigcup_{i \in I} G x_i = X$$

Lo mismo vale para $B'_1, \ldots B'_m$.

Llámese ahora SO_3 al grupo de rotaciones de la esfera unitaria en $\mathcal{R}^3$. Puede mostrarse que existen dos rotaciones $\sigma, \tau \in SO_3$ tales que todo producto finito usando los elementos $\sigma, \tau, \sigma^{-1}, \tau^{-1}$ en SO_3 puede escribirse de manera única en forma reducida; esto demuestra el siguiente resultado.

Teorema 4.4 *Existe una inmersión de F_2 en SO_3.*

(para la demostración ver Wagon (1994, Teorema 2.1).

En lo que sigue identificaremos esta inmersión con F_2. Si la acción de este grupo sobre la esfera unitaria S^2 fuera libre, tendríamos que S^2 sería F_2-paradójico — y de hecho SO_3-paradójico. Sin embargo esta acción tiene varios puntos fijos, dos por cada elemento de $F_2 - \{1\}$. Sea D el conjunto formado por estos puntos fijos, y considere $S^2 - D$. Es fácil ver que si $x \in S^2 - D$, $\rho \in F_2$, entonces $\rho x \in S^2 - D$: si $\rho x = \phi\rho x$, entonces $x = \rho^{-1}\phi\rho x$. Como F_2 actúa libremente sobre $S^2 - D$, F_2 paradójico, entonces $S^2 - D$ es F_2-paradójico. Este resultado es conocido como la paradoja de Hausdorff, y lo reescribimos en el siguiente teorema.

Teorema 4.5 (Paradoja de Hausdorff)(AC) *Considérese la acción de SO_3 sobre S_2. Entonces existe $D \subseteq S_2$ enumerable tal que $S^2 - D$ es SO_3-paradójico.*

Nota: En ausencia del axioma de elección enumerable, podemos enumerar D en forma canónica usando la dirección de cada rotación $\phi \in F_2$ (!).

Definición 4.6 Considere al grupo G actuando sobre el conjunto X. Se dice que $A, B \subseteq X$ son *G-equifragmentables* (ó $A \sim_G B$) si existen $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ particiones de A y B respectivamente, y $g_1, \ldots, g_n \in G$ tales que $g_i A_i = B_i$, i=1…n. Se escribe $A \preceq B$ si existe $C \subseteq B$ tal que $A \sim_G C$.

No es difícil ver que $\sim_G$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{P}(X)$. La relación $\preceq$ es reflexiva, transitiva, y cumple la siguiente curiosa propiedad cuya demostración está inspirada en el teorema de Schröder-Bernstein.

Teorema 4.7 (Banach-Schröder-Bernstein) *Suponga que G actúa sobre X, y $A, B \subseteq X$. Si $A \preceq B$, y $B \preceq A$, entonces $A \sim_G B$.*

Demostración: Sean $f : A \to B_1 \subseteq B$, y $g : B \to A_1 \subseteq A$ biyecciones inducidas por las equifragmentaciones. Tal como en la prueba del teorema de Schröder-Bernstein, sea $C_1 = B - B_1$, y $D_1 = g(C_1), C_2 = f(D_1), D_2 = g(C_2)$, etc. Los conjuntos C_i, así como los conjuntos D_i, son disyuntos entre sí, y haciendo $C = \bigcup_{n \in \mathcal{N}} C_i$, $D = \bigcup_{n \in \mathcal{N}} D_i$, se tiene $f(A - D) = B - C$, al igual que en la prueba del teorema mencionado. La equifragmentación en A y B_1 induce a una equifragmentación en $A - D$ y $B - C$, y la equifragmentación en B y A_1 a una en C y D. Por último, como A y $A - D$, y B y $B - C$ son disyuntos respectivamente, es fácil ver que $A \sim_G B$.

Corolario 4.8 *Suponga que G actúa sobre X. $E \subseteq X$ es G-paradójico si y sólo si existen $A, B \subseteq E$ disyuntos, $A \cup B = X$, tales que $A \sim_G E$, $B \sim_G E$.*

Demostración: Sea E G-paradójico, y $A_1, \ldots, A_n$, $B_1, \ldots, B_m \subseteq E$, $g_1, \ldots, g_n$, $h_1, \ldots, h_m \in G$ testigos de este hecho. Si los $g_i A_i$ no son disyuntos, podemos reducir los A_i convenientemente para que esto suceda — supongamos que ya se ha hecho, al igual que con los B_i. Para $C = E - \bigcup_{i=1\ldots n} A_i$, tenemos $C \preceq E$, $E \preceq C$, luego $C \sim_G E$, y $\bigcup_{i=1\ldots n} A_i \sim E$. El recíproco es evidente.

Corolario 4.9 *G actúa sobre X, $E \subseteq X$ paradójico, y $E' \sim E$. Entonces E' es paradójico.*

El último corolario y la técnica del teorema de Banach-Schröder-Bernstein resultarán de gran utilidad en lo que sigue: considere nuevamente la acción de SO_3 en S^2, y $D \subseteq S^2$ como en la paradoja de Hausdorff. Sea l una recta que pasa por el origen sin intersectar a D, y $\{a_1, a_2, \ldots\}$ una enumeración de D. Para $n, j, k \in \mathcal{N}$, sea

$$A_{njk} = \{\theta \in SO_3 \text{ rotación sobre l} \mid \theta^n(a_j) = a_k\}$$

Es posible enumerar cada A_{njk} *en forma canónica,* de manera que $\bigcup_{n,j,k} A_{njk}$ es enumerable. Sea $\rho \in SO_3$ rotación sobre l que no esté en este conjunto. Entonces $\rho^m(D) \cap \rho^n(D) = \emptyset$, $\forall m < n$. Haciendo $D^* = \bigcup_{n \in \mathcal{N}} \rho^n(D)$, tenemos que $S^2 = (S^2 - D^*) \cup D^* \sim (S^2 - D^*) \cup \rho(D^*) = S^2 - D$, y así S^2 es SO_3-paradójico.

Ahora considere la bola unitaria B en $\mathcal{R}^3$ bajo la acción de G_3. La descomposición SO_3-paradójica de S^2 induce a una descomposición paradójica de $B - \{0\}$. Además, de la misma forma que se hizo en el párrafo anterior puede mostrarse que $B \sim_{G_3} B - \{0\}$. Tenemos finalmente el resultado anunciado:

Teorema 4.10 (Paradoja de Banach-Tarski)(AC) *Toda bola sólida en $\mathcal{R}^3$ es G_3-paradójica.*

Nota: las bolas de radio 1 son todas equifragmentables con la bola unitaria; con las bolas de radios distintos de 1 se repite un procedimiento similar.

Con las herramientas que tenemos podemos mostrar un resultado todavía más desconcertante:

Teorema 4.11 (Paradoja de Banach-Tarski, versión fuerte)(AC) *Dados $A, B \subseteq \mathcal{R}^3$ acotados con interior no vacío arbitrarios, $A \sim_{G_3} B$.*

Demostración: Sea $r > 0$ tal que una bola B_r de radio r está contenida en A. Divídase B en n partes disyuntas tales que cada una de ellas pueda cubrirse con una bola de radio r. Sea T un conjunto formado por n bolas disyuntas de radio r, $T \cap A = \emptyset$. Puede verse entonces que $A \sim A \cup T$. Pero también es claro que $B \preceq A \cup T$, luego $B \preceq A$. Similarmente $A \preceq B$.

Para terminar, nótese que el único uso del axioma de elección en esta sección se hizo en el Teorema 4.3. El siguiente elegante teorema remplaza al Teorema 4.3 en el caso que nos interesa, y sólo hace uso del teorema de Hahn-Banach, o más exactamente de este lema:

Lema 4.12 (HB) *Dada una familia arbitraria de conjuntos $(X_i)_{i\in I}$, existe una colección $(\mu_i)_{i\in I}$, donde μ_i es una medida sobre $\mathcal{P}(X_i)$ y $\mu_i(X_i) = 1$, para todo $i \in I$.*

Demostración: Considere $\Lambda = \{J \subseteq I \mid J \text{ finito}\}$, ordenado por inclusión. Para $J \in \Lambda$, sea $B_J = \mathcal{P}(\prod_{i\in J} X_i)$, y sea $\gamma_{JK}(U) = \pi_J^{K-1}(U)$, donde π_J^K es la función proyección. Entonces $(B_J, \gamma_{JK})_{J,K\in\Lambda}$ es una familia directa de álgebras booleanas, y existe una colección (coherente) $(\mu_J)_{J\in\Lambda}$ de medidas sobre $\mathcal{P}(\prod_{i\in J} X_i)$, $J \in \Lambda$. El resultado se obtiene tomando las μ_J con $|J| = 1$.

Teorema 4.13 (Pawiikowski, 1991)(HB) *Suponga que F_2 actúa libremente sobre un conjunto X. Entonces X es F_2-paradójico.*

Demostración: Sean a, b las letras generadoras de F_2, y sean $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = a^{-1}$, $a_4 = b^{-1}$. Sea A_i el conjunto formado por las palabras reducidas que *terminan* en a_i, $i = 1 \ldots 4$. Entonces los A_i son disyuntos dos a dos, y siguiendo un argumento similar al del Lema 4.2, vemos que $A_1 a_1^{-1} \cup A_3 = F_2$, y en general existe una permutación σ de $\{1, \ldots 4\}$ tal que $A_i a_i^{-1} \cup A_{\sigma i} = F_2$, $i = 1, \ldots 4$.

Para el conjunto de órbitas X/F_2 defínase una colección de medidas $(\mu_{[x]})_{[x]\in X/F_2}$ como en el lema anterior. Sean

$$X_i = \{x \in X \mid \mu_{[x]}(A_i x) > \frac{1}{2}\}, \; i = 1 \ldots 4$$

y sean $Y_1 = X - (a_1 X_1 \cup a_2 X_2)$, $Y_2 = X - (a_3 X_3 \cup a_4 X_4)$. Es claro que $a_1 X_1 \cup a_2 X_2 \cup Y_1 = a_3 X_3 \cup a_4 X_4 \cup Y_2 = X$, de manera que si mostramos que los X_i, Y_i son disyuntos entre sí estaremos listos. Dado que la acción de F_2 sobre X es libre, es claro que los X_i son disyuntos entre sí. Para ver que $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, Se mostrará que $\bigcup_{i=1}^4 a_i X_i = X$: dado $x \in X$, existe i tal que $\mu_{[x]}(A_{\sigma i}x) < 1/2$; pero $[x] = F_2 x = A_i a_i^{-1} x \cup A_{\sigma i} x$, y así $\mu_{[x]}(A_i a_i^{-1} x) > 1/2$ y $a_i^{-1} x \in X_i$, es decir $x \in a_i X_i$. Por último veremos que los X_i son disyuntos de los Y_i. Para esto, se muestra que $X_i \subseteq a_j X_j$, $i \neq \sigma j$: como $A_i \cap A_{\sigma j} = \emptyset$, entonces $A_i \subseteq A_j a_j^{-1}$, y si $x \in X_i$, entonces $\mu_{[x]}(A_j a_j^{-1} x) \geq \mu_{[x]}(A_i x) > 1/2$, y $x \in a_j X_j$. Así, $X_i \subseteq a_1 X_1$ para $i \neq \sigma 1$, $X_{\sigma 1} \subseteq a_2 X_2$, y los X_i son disyuntos de Y_1. Similarmente con Y_2.

Corolario 4.14 *Los teoremas 4.5, 4.10 y 4.11 pueden ser demostrados en ZF+HB.*

La paradoja de Banach-Tarski conduce a algunos resultados importantes en la teoría de medida:

Teorema 4.15 (HB) *Para $n \geq 3$, no existen medidas finitamente aditivas definidas en $\mathcal{P}(\mathcal{R}^n)$ que sean invariantes bajo isometrías y que asignen medida 1 al cubo unitario.*

Demostración: Cualquier medida μ en $\mathcal{R}^3$ con estas características deberá cumplir $0 < \mu(B) < \infty$, y la contradicción se hace evidente por el Teorema 4.10. Cualquier medida ν en $\mathcal{R}^n$, $n > 3$ induce a una medida μ en $\mathcal{R}^3$ haciendo $\mu(A) = \nu(A \times [0,1]^{n-3})$.

En particular, deben existir conjuntos no Lebesgue-medibles en $\mathcal{R}^3$. Pero se muestra en Foreman y Wehrung (1991) que, incluso en ZF+HB, si todo subconjunto de $[0,1]$ es Lebesgue-medible, entonces todo subconjunto de $\mathcal{R}^n$ es Lebesgue-medible, $n \geq 1$.

Teorema 4.16 (HB) *Existe $A \subseteq \mathcal{R}$ tal que A no es Lebesgue-medible.*

Por último enunciamos un teorema similar que se demuestra en Pincus (1974):

Teorema 4.17 *Existe $A \subseteq \mathcal{R}$ tal que A no tiene la propiedad de Baire.*

Apéndice A

Tabla de implicaciones

$$
\begin{tikzcd}
\text{Tychonoff} \arrow[d] & & \text{AC} \arrow[d] & & & & \\
\text{Tych. Hdorff} & \exists\text{Medidas } \{0,1\} \arrow[d] & \text{IPB} \arrow[d] & \text{ACC finito} \arrow[d] & & \text{ACC comp. Hdrff} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & \exists\text{Medidas} & \text{HB} \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd] & \text{ACC difuso finito} & \text{ACC hilbertible} & & \text{ACC lineal} \\
 & \exists A \subseteq \mathcal{R} \text{ no Lebesgue-medible} & & \exists A \subseteq \mathcal{R} \text{ sin la prop. de Baire} & & & \\
 & & \text{Banach-Tarski} & & & &
\end{tikzcd}
$$

Los resultados situados al mismo nivel que AC, IBP y HB son equivalentes a cada uno de estos tres teoremas, respectivamente. Entre ellos las flechas denotan, además de implicación, una relación de debilitamiento en los enunciados. La paradoja de Banach-Tarski no es un teorema de ZF —ver Wagon (1994, p.207)—, y por tanto tampoco lo es ninguno de los teoremas por encima de ella. En lo que respecta a las otras dos afirmaciones, ver Pincus (1974).

Bibliografía

[1] Brézis, Haïm, *Analyse fonctionnelle*, Masson, Paris, 1987.

[2] Foreman, Matthew y Wehrung, Friedrich, "The Hahn-Banach Theorem Implies the Existence of a Non-Lebesgue Measurable Set", *Fundamenta Matematicae*, 138, 1991.

[3] Grätzer George, *Universal Algebra*, Springer Verlag, New York, 1979.

[4] Hochstadt, Harry, "Edward Helly, Father of the Hahn-Banach Theorem", *Mathematical Intelligencer* 2, 123-125, 1980.

[5] Jech, Thomas, *The Axiom of Choice*, North Holland Publishing Company, 1973.

[6] Lesmes, Jaime y Abuabara, Teófilo, *Elementos de Análisis Funcional*, Universidad de los Andes, 1981, primera reimpresión 1985.

[7] Levy, Azriel, *Basic Set Theory*, Springer Verlag, 1979.

[8] Luxemburg, W.A.J., "Reduced Powers of the Real Number System and Equivalents of the Hahn-Banach Theorem", *Int. Symp. on the Applications of Model theory to Algebra, Analysis and Probability*, Holt, Rinehart and Winston, 1969.

[9] Luxemburg, W.A.J. y Stroyan, K.D., *Introduction to the Theory of Infinitesimals*, Academic Press, Inc., 1976.

[10] Miranda, Carlo, *Istituzioni di Analisi Funzionale Lineare*, Unione Matematica Italiana, 1978.

[11] Moore, G.H., *Zermelo's Axiom of Choice*, Springer, 1982.

[12] Pincus, David, "The Strength of the Hahn-Banach Theorem", *Lecture Notes in Mathematics*, 369, *Victoria Symposium on Nonstandard Analysis*, Springer Verlag, 1974.

[13] Pawiikowski J., "The Hahn-Banach Theorem Implies the Banach-Tarski Paradox", *Fundamenta Matematicae*, 138, 1991.

[14] Rudin, Walter, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Inc., 1953, tercera edición 1976.

[15] Wagon, Stan, *The Banach-Tarski Paradox*, Cambridge Univ. Press, 1985, reimpreso con correcciones 1994.