УДК 517.938

А. Городецкий

Регулярность центральных слоев частично гиперболических множеств и приложения

В работе рассматриваются частично гиперболические отображения близкие к прямому произведению гиперболического на тождественное и доказывается гельдерова зависимость центральных слоев такого отображения в C^r-метрике от точки в базе. Использование этого результата позволяет построить открытую область диффеоморфизмов, обладающих довольно необычными свойствами (имеющих транзитивные множества с периодическими точками разных индексов, орбиты с нулевым Ляпуновским показателем). Статья завершает серию работ начатых Ю. С. Ильяшенко и автором.

Библиография: 26 наименований.

§ 1. Введение

Рассмотрим отображение $S\colon N \to N$ многообразия N, обладающее локально максимальным гиперболическим множеством $\Lambda \subset N$. Пусть M – гладкое замкнутое многообразие. Свойства малых возмущений отображения $S \times \mathrm{id}_M\colon N \times M \to N \times M$ исследовались во многих работах (см., например, [13], [25], [22], [19], [3], [20]). В настоящей статье мы показываем, что центральные слои возмущенного отображения гёльдерово зависят в C^r-метрике от точки в базе. Затем мы используем этот результат, чтобы закончить доказательство следующей теоремы, анонсированной Ю. С. Ильяшенко и автором в [9], [10].

Теорема А. *Для данного конечного интервала $I \subset \mathbb{R}$, $0 \in I$, и замкнутого многообразия M, $\dim M \geqslant 3$, найдется такая область $U \subset \mathrm{Diff}^2(M)$, что любой диффеоморфизм $f \in U$ имеет локально максимальное инвариантное множество $\Delta \subset M$ такое, что*:

(i) *существуют такие два числа l_1 и $l_2 = l_1 + 1$, что гиперболические периодические орбиты с устойчивыми многообразиями размерности l_i плотны в Δ*;

(ii) *для любого $\lambda \in I$ найдется плотная в Δ орбита с одним из промежуточных показателей Ляпунова, равным λ.*

Добавление. *В качестве множества Δ в теореме* А *при* $\dim M \geqslant 4$ *можно взять некоторый частично гиперболический аттрактор.*

Работа была выполнена при частичной поддержке РФФИ (гранты № 02-01-00482, 02-01-22002) и CRDF RM1-2358.

Свойство (i) имеет дальнейшие следствия (см. [8], [17]). Отличными от наших методами свойство (i) для некоторых частично гиперболических диффеоморфизмов, близких к прямому произведению, было доказано в [3].

Доказательство теоремы A основано на свойствах косых произведений над подковой и соленоидом [10] и на следующей теореме.

Теорема B. *Пусть отображение* $\mathfrak{F}\colon N\times M\to N\times M$, $\mathfrak{F}=S\times\mathrm{id}_M$, *имеет класс гладкости* C^{r+1}, $0\leqslant r<\infty$. *Тогда для любого* C^{r+1}*-диффеоморфизма* $\mathfrak{G}$, *достаточно* C^{r+1}*-близкого к* $\mathfrak{F}$, *существуют инвариантное множество* Δ *и гомеоморфизм* $\Psi\colon\Lambda\times M\to\Delta$. *Более того, если* $p_1\colon\Lambda\times M\to\Lambda$ *– проекция на первый сомножитель, то отображение* $\Phi=p_1\circ\Psi^{-1}$, $\Phi\colon(\Delta,\mathfrak{G})\to(\Lambda,S)$ *является полусопряжением, слои* $\Phi^{-1}(x)$ C^{r+1}*-гладкие и гёльдерово зависят от точки* $x\in\Lambda$ *в* C^r*-метрике. Показатель и константа в условии Гёльдера могут быть выбраны одними и теми же для всех возмущений в малой* C^{r+1}*-окрестности отображения* $\mathfrak{F}$.

В случае, когда S – диффеоморфизм Аносова на $\mathbb{T}^n$ и $M=\mathbb{T}^k$, этот результат (иными методами) был получен в [18].

Другие многочисленные результаты о гёльдеровых структурах, связанных с равномерной и частичной гиперболичностью, были получены Д. В. Аносовым [2], М. Брином [6], М. Брином и Я. Песиным [7], Ч. Пью, М. Шубом и Э. Вилкинсон [21], Б. Хасельблатом [12], Дж. Шмилингом и Д. Зигмундом-Шульцем [23].

Недавно В. Клепцын и М. Нальский [16], продолжая исследования, проведенные в работе [11], использовали теорему B для построения C^1-открытого множества диффеоморфизмов с негиперболическими инвариантными эргодическими мерами.

Статья построена следующим образом. В § 2 мы напоминаем понятие внутренне гиперболического отображения и доказываем, что сопряжение двух внутренне гиперболических отображений должно быть гёльдеровым. В § 3 мы рассматриваем малое возмущение прямого произведения гиперболического отображения на тождественное, пространство центральных слоев, снабженное C^0-нормой, и доказываем, что индуцированное на этом пространстве отображение является внутренне гиперболическим. Затем в § 4 мы определяем C^r-метрику в пространстве центральных слоев и доказываем внутреннюю гиперболичность индуцированного отображения в соответствии с C^r-метрикой. Вместе с результатами § 2 (теоремами 2.2 и 2.3) отсюда немедленно следует теорема B. Наконец, в § 4 мы применяем теорему B и результаты относительно свойств косых произведений специального вида, полученные Ю. С. Ильяшенко и автором в работе [10], для исследования свойств некоторых частично гиперболических отображений. Это позволяет получить доказательство теоремы A.

§ 2. Внутренне гиперболические гомеоморфизмы

Докажем теорему 2.2 (аналог теоремы 5 из [9]), которая будет использована в § 3 для доказательства гёльдеровой зависимости в C^r-норме центральных слоев частично гиперболических инвариантных множеств от точки в базе. В п. 2.1 приводятся некоторые известные факты о локально максимальных гиперболических множествах [8, гл. 6 и гл. 18]. В п. 2.2 приведены определение и некоторые свойства внутренне гиперболических гомеоморфизмов [1], [5].

Наконец, в п. 2.3 даны формулировка и доказательство основного результата этого параграфа – теоремы 2.2.

2.1. Гёльдеровость сопряжений гиперболических множеств. Напомним определение локально максимального гиперболического множества.

Определение 2.1. Инвариантное гиперболическое множество Λ отображения $S\colon N \to N$ называется *локально максимальным*, если существует такая окрестность U множества Λ, что любое S-инвариантное множество в U, содержащее Λ, совпадает с Λ.

Пусть $\Lambda \subset N$ – локально максимальное гиперболическое множество отображения $S\colon N \to N$. Пусть $d(\,\cdot\,,\cdot\,)$ – метрика на N.

Напомним стандартные обозначения:

$$x \in W^u(y) \iff d\bigl(S^{-n}(x), S^{-n}(y)\bigr) \to 0, \qquad n \to +\infty, \tag{2.1}$$

$$x \in W^s(y) \iff d\bigl(S^{n}(x), S^{n}(y)\bigr) \to 0, \qquad n \to +\infty, \tag{2.2}$$

$$W^u_\varepsilon(x) = \bigl\{z | z \in W^u(x),\ d\bigl(f^{-n}(z), f^{-n}(x)\bigr) \leqslant \varepsilon\ \forall\, n \in \mathbb{Z}^+\bigr\}, \tag{2.3}$$

$$W^s_\varepsilon(x) = \bigl\{z | z \in W^s(x),\ d\bigl(f^{n}(z), f^{n}(x)\bigr) \leqslant \varepsilon\ \forall\, n \in \mathbb{Z}^+\bigr\}. \tag{2.4}$$

Определение 2.2. Инвариантное гиперболическое множество Λ отображения $S\colon N \to N$ обладает *локальной структурой прямого произведения*, если существуют такие $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, что выполнено следующее. Если $d(x, y) < \delta$, то пересечение $W^u_\varepsilon(x) \cap W^s_\varepsilon(y)$ состоит из единственной точки $w(x, y)$, которая принадлежит Λ.

Предложение 2.1 [15, теорема 18.4.1]. *Инвариантное гиперболическое множество Λ локально максимально тогда и только тогда, когда оно обладает локальной структурой прямого произведения.*

Теорема 2.1 [15, теорема 19.1.2]. *Пусть Λ и Λ' – локально максимальные гиперболические множества диффеоморфизмов S и S' соответственно и $h\colon \Lambda \to \Lambda'$ – топологическое сопряжение, $h = S'hS^{-1}$. Тогда h и h^{-1} гёльдеровы.*

Замечание 2.1. Теорема 2.1 впервые была доказана Д. В. Аносовым для диффеоморфизмов, впоследствии получивших название диффеоморфизмов Аносова.

2.2. Внутренне гиперболические гомеоморфизмы: определение и основные свойства. Здесь мы напоминаем понятие внутренне гиперболического гомеоморфизма (в качестве примера можно рассмотреть ограничение диффеоморфизма на свое локально максимальное гиперболическое множество). Этот объект был введен В. Алексеевым и М. Якобсоном в работе [1, § 9] под названием *$A^{\#}$-гомеоморфизм* для аксиоматизации условий, при которых можно построить марковское разбиение и символическую динамику для гомеоморфизма метрического компакта. Они модифицировали аксиому A^*, введенную Р. Боуэном в [5]. Здесь это понятие позволяет нам доказать обобщение теоремы 2.1 (а именно, теорему 2.2).

Пусть (Λ, d) – компактное метрическое пространство, $S\colon \Lambda \to \Lambda$ – липшицеморфизм (т. е. S – гомеоморфизм, S и S^{-1} липшицевы). Определим множества $W^u(x)$, $W^s(x)$, $W^u_\varepsilon(x)$, $W^s_\varepsilon(x)$ формулами (2.1)–(2.4).

Определение 2.3. Липшицеморфизм S компактного метрического пространства (Λ, d) называется *внутренне гиперболическим*, если существуют такие $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$, что выполнено следующее:

(IH1) если $d(x,y) < \delta$, то существует единственная точка $w = w(x,y) \in \Lambda$ такая, что $w \in W^u_\varepsilon(x) \cap W^s_\varepsilon(y)$;

(IH2) существует константа $0 < \lambda < 1$ такая, что

$$y \in W^s_\varepsilon(x) \Longrightarrow d\bigl(S^n(x), S^n(y)\bigr) \leqslant \lambda^n d(x,y), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{2.5}$$

$$y \in W^u_\varepsilon(x) \Longrightarrow d\bigl(S^{-n}(x), S^{-n}(y)\bigr) \leqslant \lambda^n d(x,y), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{2.6}$$

Простейшими примерами являются локально максимальные гиперболические множества (с ляпуновской метрикой, см. (3.1) и (3.1′)) и сдвиги Бернулли.

Замечание 2.2. Формально наше определение отличается от определения $A^{\#}$-гомеоморфизма, данного В. Алексеевым и М. Якобсоном, поскольку мы не требуем непрерывности отображения $(x,y) \to w(x,y)$, но предполагаем липшицевость отображения. Ниже мы покажем, что непрерывность $w(x,y)$ в этом случае следует из остальных условий.

Предложение 2.2. *Пусть $S\colon \Lambda \to \Lambda$ – внутренне гиперболическое отображение. Тогда оно является разделяющим, т.е. существует такая константа $\gamma > 0$ (постоянная разделения), что если $d\bigl(S^n(x), S^n(y)\bigr) \leqslant \gamma$ для некоторых $x, y \in \Lambda$ и всех $n \in \mathbb{Z}$, то $x = y$.*

Доказательство. Поскольку $d\bigl(S^n(x), S^n(y)\bigr) \leqslant \varepsilon$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, имеем $y \in W^s_\varepsilon(x)$ и $y \in W^u_\varepsilon(x)$. Из свойства (IH1) следует, что $x = w(x,x)$ – единственная точка пресечения $W^s_\varepsilon(x)$ и $W^u_\varepsilon(x)$, поэтому $x = y$. Предложение доказано.

Предложение 2.3. *Пусть отображение $S\colon \Lambda \to \Lambda$ является внутренне гиперболичным. Возьмем ε, δ и λ, как в определении 2.3. Для любых точек $x, y \in \Lambda$ и последовательностей $\{x_n\}, \{y_n\} \subset \Lambda$ таких, что $d(x,y) < \delta$ и $x_n \to x$, $y_n \to y$ при $n \to +\infty$, мы имеем $w(x_n, y_n) \to w(x,y)$, т.е. отображение $w\colon (x,y) \mapsto W^u_\varepsilon(x) \cap W^s_\varepsilon(y)$ непрерывно.*

Доказательство. Обозначим $w_n = w(x_n, y_n) \in \Lambda$. Если $w_n \not\to w(x,y)$, то в силу компактности Λ мы можем выбрать такую подпоследовательность w_{n_k}, что $\lim_{k\to\infty} w_{n_k} = w' \neq w(x,y)$. Покажем, что $w' \in W^s_\varepsilon(y)$. Действительно, $w_n \in W^s_\varepsilon(y_n) \Rightarrow d(y_n, w_n) \leqslant \varepsilon$, поэтому

$$\lim_{k\to\infty} d(y_{n_k}, w_{n_k}) = d(y, w') \leqslant \varepsilon.$$

Теперь покажем, что для всех $l \geqslant 1$ выполнено $d\bigl(S^l(y), S^l(w')\bigr) \leqslant \varepsilon$. Пусть P – константа Липшица для S. Тогда существует такое $N = N(l)$, что $d(y, y_N) < \frac{1-\lambda^l}{2P^l}\,\varepsilon$ и $d(w', w_N) < \frac{1-\lambda^l}{2P^l}\,\varepsilon$. Поскольку $d\bigl(S^l(y_N), S^l(w_N)\bigr) \leqslant \lambda^l d(y_N, w_N) \leqslant \lambda^l \varepsilon$, мы имеем

$$\begin{aligned} d\bigl(S^l(y), S^l(w')\bigr) &\leqslant d\bigl(S^l(y), S^l(y_N)\bigr) + d\bigl(S^l(y_N), S^l(w_N)\bigr) + d\bigl(S^l(w_N), S^l(w')\bigr) \\ &\leqslant P^l \frac{1-\lambda^l}{2P^l}\,\varepsilon + \lambda^l \varepsilon + P^l \frac{1-\lambda^l}{2P^l}\,\varepsilon \leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

По определению отсюда следует, что $w' \in W^s_\varepsilon(y)$.

Аналогично имеем $w' \in W^u_\varepsilon(x)$. Но по условию (IH1) существует только одна точка в пересечении $W^u_\varepsilon(x) \cap W^s_\varepsilon(y)$, и поэтому $w' = w(x,y)$. Предложение доказано.

2.3. Гёльдеровость сопряжений: внутренне гиперболический случай. Сформулируем аналог теоремы 2.3 для внутренне гиперболических отображений.

Теорема 2.2. *Пусть Λ и Λ' – компактные метрические пространства, липшицеморфизмы $S\colon \Lambda \to \Lambda$ и $S'\colon \Lambda' \to \Lambda'$ внутренне гиперболичны и $h\colon \Lambda \to \Lambda'$ – топологическое сопряжение, $h = S'hS^{-1}$. Тогда h и h^{-1} гёльдеровы.*

Нам нужно также иметь возможность оценивать показатель Гёльдера такого сопряжения. Это обеспечивается следующим утверждением.

Теорема 2.3. *Пусть Λ и Λ' – компактные метрические пространства, липшицеморфизмы $S\colon \Lambda \to \Lambda$ и $S'\colon \Lambda' \to \Lambda'$ внутренне гиперболичны с константами λ и λ' соответственно и $h\colon \Lambda \to \Lambda'$ – топологическое сопряжение: $h = S'hS^{-1}$. Пусть P – константа Липшица для S и Q – константа Липшица для S^{-1}. Пусть для некоторых $\alpha > 0$, $\alpha' > 0$ выполнены неравенства*

$$\lambda P^\alpha < 1, \qquad \lambda Q^\alpha < 1, \qquad \lambda' P^{\alpha'} < 1, \qquad \lambda' Q^{\alpha'} < 1.$$

Тогда сопряжение h гёльдерово с показателем Гёльдера, равным $\alpha\alpha'$.

Доказательство. Доказательство сходно с доказательством классической теоремы 2.1 (мы следуем идеям, использованным в [15, гл. 19]). Единственная проблема состоит в том, что мы не можем использовать равномерную трансверсальность устойчивых и неустойчивых многообразий. Вместо этого мы используем лемму 2.2.

Лемма 2.1. *Пусть $\alpha > 0$. Существует такая константа $K > 0$, $K = K(\alpha)$, что для любых $a > 0$, $b > 0$ выполнено следующее неравенство:*

$$(a^\alpha + b^\alpha)^{1/\alpha} \leqslant K(a+b).$$

Доказательство. Для любого $\alpha > 0$ функция $\frac{(1+x^\alpha)^{1/\alpha}}{1+x}$ ограничена при $x \geqslant 0$. Это дает требуемое неравенство после подстановки $x = \frac{b}{a}$.

Лемма 2.2. *Пусть отображение $S\colon \Lambda \to \Lambda$ внутренне гиперболично с константой λ. Пусть P – константа Липшица для S и Q – константа Липшица для S^{-1}. Пусть для некоторого $\alpha > 0$ выполнены неравенства $\lambda P^\alpha < 1$, $\lambda Q^\alpha < 1$. Тогда существует такое $L > 1$, что если $w = w(x,y) = W^u_\varepsilon(x) \cap W^s_\varepsilon(y)$, то*

$$d(x,w) + d(w,y) \leqslant L d^\alpha(x,y).$$

Доказательство. По предложению 2.2 ε – постоянная разделения для отображения S. Существует $L_1 \geqslant 1$ такое, что если $d(x,y) > \varepsilon$, то $\frac{d(x,w)+d(w,y)}{d^\alpha(x,y)} \leqslant L_1$. Покажем, что утверждение леммы выполнено для $L = 2L_1$.

Если $w(x,y) = x$ или $w(x,y) = y$, то утверждение леммы очевидно. В противном случае $d\bigl(S^k(x), S^k(y)\bigr) \geqslant \varepsilon$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Оценим $d(x,w)$, используя (IH2) и неравенство $\lambda P^\alpha \leqslant 1$. Имеем

$$\begin{aligned} d(x,w) &\leqslant \lambda^k d\bigl(S^k(x), S^k(w)\bigr) \\ &\leqslant \lambda^k L_1 d^\alpha\bigl(S^k(x), S^k(y)\bigr) \leqslant \lambda^k L_1 P^{k\alpha} d^\alpha(x,y) \leqslant L_1 d^\alpha(x,y). \end{aligned}$$

Аналогично, $d(w,y) \leqslant L_1 d^\alpha(x,y)$.

Таким образом, $d(x,w) + d(w,y) \leqslant 2L_1 d^\alpha(x,y) \leqslant L d^\alpha(x,y)$. Лемма доказана.

Определение 2.4. Пусть Λ, Λ' – метрические пространства. Отображение $h\colon \Lambda \to \Lambda$ называется *локально гёльдеровым с показателем* α, если существуют такие $\gamma > 0$ и $C > 0$, что

$$d_\Lambda(x,y) < \gamma \Longrightarrow d_{\Lambda'}\bigl(h(x), h(y)\bigr) \leqslant C d_\Lambda^\alpha(x,y).$$

Предложение 2.4. *Пусть Λ, Λ' – компактные метрические пространства. Пусть отображение $h\colon \Lambda \to \Lambda$ локально гёльдерово с показателем α. Тогда оно гёльдерово с тем же показателем.*

Замечание 2.3. В предложении 2.4 показатель α может быть и больше 1.

Доказательство предложения 2.4. По определению 2.4 существуют такие $\gamma > 0$ и $C > 0$, что если $d_\Lambda(x,y) < \gamma$, то $d_{\Lambda'}\bigl(h(x),h(y)\bigr) \leqslant C d_\Lambda^\alpha(x,y)$. Пусть $R = \max(C, \gamma^{-\alpha} \operatorname{diam} \Lambda')$.

Теперь если $d_\Lambda(x,y) < \gamma$, то $d_{\Lambda'}\bigl(h(x),h(y)\bigr) \leqslant C d_\Lambda^\alpha(x,y) \leqslant R d_\Lambda^\alpha(x,y)$. Но если $d_\Lambda(x,y) \geqslant \gamma$, то

$$d_{\Lambda'}\bigl(h(x),h(y)\bigr) \leqslant \operatorname{diam}\Lambda' \leqslant (\gamma^{-\alpha}\operatorname{diam}\Lambda')\gamma^\alpha \leqslant R d_\Lambda^\alpha(x,y).$$

Итак, отображение h гёльдерово с показателем α (и константой R).

Лемма 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.3. Предположим, что существует такая константа $K_1 > 0$, что для любых $x, y \in \Lambda$, $y \in W_\varepsilon^u(x)$ или $y \in W_\varepsilon^s(x)$, выполнено неравенство $d\bigl(h(x),h(y)\bigr) \leqslant K_1 d^{\alpha'}(x,y)$. Тогда отображение h локально гёльдерово с показателем $\alpha\alpha'$.*

Доказательство. В силу леммы 2.1 и леммы 2.2 имеем

$$\begin{aligned} d(h(x),h(y)) &\leqslant d\bigl(h(x),h(w)\bigr) + d\bigl(h(w),h(y)\bigr) \leqslant K_1\bigl(d^{\alpha'}(x,w) + d^{\alpha'}(w,y)\bigr) \\ &\leqslant K^{\alpha'} K_1 \bigl(d(x,w) + d(w,y)\bigr)^{\alpha'} \leqslant K^{\alpha'} K_1 L^{\alpha'} d^{\alpha\alpha'}(x,y). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 2.3. Достаточно показать, что h гёльдерово отдельно вдоль W_ε^u и вдоль W_ε^s. Действительно, тогда по лемме 2.3 следует, что отображение h локально гёльдерово с показателем $\alpha\alpha'$, а по предложению 2.3 это эквивалентно гёльдеровости с тем же показателем.

Поскольку Λ компактно, отображение h равномерно непрерывно. Зафиксируем $\varepsilon_0 > 0$. Существует такое $\delta_0 > 0$, что если $d(x,y) < \delta_0$, то $d\bigl(h(x),h(y)\bigr) < \varepsilon_0$.

Заметим, что из (2.1) и (2.2) следует, что если $x \in W^u(y)$, то $h(x) \in W^u\bigl(h(y)\bigr)$, и если $x \in W^s(y)$, то $h(x) \in W^s\bigl(h(y)\bigr)$.

Теперь пусть $x \in W^u(y)$ и $d(x,y) = d < \delta_0$. Существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $d\bigl(S^n(x), S^n(y)\bigr) \leqslant P^n d < \delta_0 \leqslant P^{n+1} d$. Следовательно, $d\bigl(h(S^n(x)), h(S^n(y))\bigr) < \varepsilon_0$, и, используя неравенство $\lambda' P^{\alpha'} < 1$, мы имеем

$$
\begin{aligned}
d\bigl(h(x), h(y)\bigr) &= d\bigl(S'^{-n} h\bigl(S^n(x)\bigr), S'^{-n} h(S^n(y))\bigr) \leqslant \lambda'^n \varepsilon_0 = \lambda'^n \delta_0^{\alpha'} \bigl(\varepsilon_0/\delta_0^{\alpha'}\bigr) \\
&\leqslant \bigl(\lambda' P^{\alpha'}\bigr)^n P^{\alpha'} \bigl(\varepsilon_0/\delta_0^{\alpha'}\bigr) d^{\alpha'} < \bigl[P^{\alpha'} \bigl(\varepsilon_0/\delta_0^{\alpha'}\bigr)\bigr]\, d^{\alpha'}(x,y).
\end{aligned}
$$

Доказательство гёльдеровости h вдоль W^s_ε аналогично (нужно заметить, что h сопрягает S^{-1} и S'^{-1}, и воспользоваться неравенством $\lambda' Q^{\alpha'} < 1$). Теорема доказана.

§ 3. Внутренняя гиперболичность отображения, индуцированного в пространстве центральных слоев с C^0-метрикой

В этом и следующем параграфах мы доказываем теорему B. Для этого мы рассматриваем пространство центральных слоев как метрическое пространство. Отдельный слой является точкой, и метрика задана C^r-расстоянием между слоями. Оказывается, что при этом определенное ниже индуцированное отображение является внутренне гиперболическим (теорема 3.2), и применение теоремы 2.3 немедленно доказывает теорему B.

3.1. Гладкие возмущения прямых произведений и их инвариантные множества. Следующее утверждение есть частный случай теорем 6.1, 6.8 и 7.1 из [13].

Теорема 3.1. *Пусть отображение $S\colon N \to N$ многообразия N имеет класс гладкости C^{r+1}, $0 \leqslant r < \infty$, и обладает локально максимальным гиперболическим множеством $\Lambda \subset N$. Пусть $U \subset N$ – такая окрестность Λ, что $\Lambda = \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} S^n(U)$. Пусть M – замкнутое многообразие. Рассмотрим отображение $\mathfrak{F}\colon N \times M \to N \times M$, $(x,\varphi) \mapsto (S(x),\varphi)$. Тогда для любого C^{r+1}-диффеоморфизма $\mathfrak{G}$, достаточно C^{r+1}-близкого к $\mathfrak{F}$, выполнено следующее*:

(i) *существуют инвариантное множество $\Delta \subset U \times M$ и гомеоморфизм $\Psi\colon \Lambda \times M \to \Delta$*;

(ii) *обозначим через $p_1\colon \Lambda \times M \to \Lambda$ проекцию на первый сомножитель, тогда отображение $\Phi = p_1 \circ \Psi^{-1}$, $\Phi\colon (\Delta, \mathfrak{G}) \to (\Lambda, S)$, является полусопряжением*;

(iii) *центральные слои $\Phi^{-1}(x)$, $x \in \Lambda$, являются C^{r+1}-гладкими и C^{r+1}-стремятся к центральным слоям отображения $\mathfrak{F}$ (т. е. к $\{x\} \times M$), когда $\mathfrak{G}$ стремится к $\mathfrak{F}$ в C^{r+1}-топологии*;

(iv) *локальные центрально-устойчивые и центрально-неустойчивые многообразия $\mathfrak{G}$, а также локальные сильно устойчивые и сильно неустойчивые многообразия C^{r+1}-стремятся к соответствующим многообразиям $\mathfrak{F}$, когда $\mathfrak{G}$ стремится к $\mathfrak{F}$ в C^{r+1}-топологии.*

Докажем следующее добавление к теореме 3.1

Теорема B$'$. *В условиях теоремы 3.1 центральные слои $\Phi^{-1}(x)$ C^{r+1}-диффеоморфизма $\mathfrak{G}$, достаточно C^{r+1}-близкого к $\mathfrak{F}$, гёльдерово зависят от точки $x \in \Lambda$ в C^r-метрике. Показатель и константа в условии Гёльдера* *могут быть выбраны одними и теми же для всех возмущений из малой* C^{r+1}*-окрестности отображения* $\mathfrak{F}$.

Обозначим через $\mathfrak{L}^r$ метрическое пространство всех центральных слоев отображения $\mathfrak{G}$ с C^r-метрикой (которая определяется ниже). Отдельный слой $\Phi^{-1}(x)$ является одной точкой в $\mathfrak{L}^r$. Заметим, что $\mathfrak{G}$ отображает слой в слой, поэтому $\mathfrak{G}$ индуцирует корректно определенное отображение $\mathfrak{g}\colon \mathfrak{L}^r \to \mathfrak{L}^r$. Для доказательства теоремы B$'$ мы покажем, что отображение $\mathfrak{g}$ внутренне гиперболично. Мы также покажем, что системы $(\Lambda, S|_\Lambda)$ и $(\mathfrak{L}^r, \mathfrak{g})$ сопряжены. После этого применение теоремы 2.3 немедленно дает теорему B$'$.

Теорема 3.2. *Пусть отображение* $S\colon N \to N$ *имеет локально максимальное гиперболическое множество с константой* λ (*т.е. выполнены* (2.5) *и* (2.6)). *Пусть отображение* $\mathfrak{F}\colon N\times M \to N \times M$, $(x,\varphi)\mapsto \bigl(S(x),\varphi\bigr)$, *имеет класс гладкости* C^{r+1}, $1\leqslant r<\infty$. *Пусть* $\lambda' > \lambda$. *Тогда для любого* C^{r+1}*-диффеоморфизма* $\mathfrak{G}$, *достаточно* C^{r+1}*-близкого к* $\mathfrak{F}$, *отображение* $\mathfrak{g}\colon \mathfrak{L}^r \to \mathfrak{L}^r$, *индуцированное в пространстве центральных слоев, является внутренне гиперболическим с константой сжатия* λ' *и системы* $(\Lambda, S|_\Lambda)$ *и* $(\mathfrak{L}^r, \mathfrak{g})$ *сопряжены.*

Мы докажем теорему 3.2 индукцией по r. Оставшаяся часть этого параграфа содержит доказательство базы индукции. В следующем параграфе мы проделываем шаг индукции.

3.2. База индукции: C^0-метрика. Отображение $S\colon N\to N$ имеет локально максимальное множество Λ. В малой окрестности $U(\Lambda)$ существует такое разложение $T_{U(\Lambda)}N = E^s\oplus E^u$, что вдоль устойчивого распределения сжимает дифференциал отображения S, а вдоль неустойчивого распределения сжимает обратное отображение. Предположим, что в окрестности $U(\Lambda)$ задана ляпуновская метрика:

$$\|DS_x(v)\| \leqslant \lambda\|v\|, \quad \text{если } v\in E^s(x),\ x\in\Lambda, \tag{3.1}$$

$$\|DS_x^{-1}(v)\| \leqslant \lambda\|v\|, \quad \text{если } v\in E^u(x),\ x\in\Lambda. \tag{3.1$'$}$$

Пусть отображение $\mathfrak{G}$ C^1-близко к $\mathfrak{F} = S\times \mathrm{id}_M$. Обозначим через $\bar{x}$ центральный слой отображения $\mathfrak{G}$ над точкой $x\in\Lambda$, т.е. $\bar{x}=\Phi^{-1}(x)$ (мы будем использовать это обозначение как для множества $\Phi^{-1}(x)$, так и для точки в $\mathfrak{L}$).

Центральный слой $\bar{x}$ C^1-близок к соответствующему центральному слою $\{x\}\times M$ отображения $\mathfrak{F}$ и поэтому является графиком некоторого отображения $\hat{x}\colon M\to N$. Определим C^0-расстояние между центральными слоями (т.е. C^0-метрику в $\mathfrak{L}$) следующим образом:

$$d_{C^0}(\bar{x},\bar{y}) = \max_{\varphi\in M} d_N\bigl(\hat{x}(\varphi), \hat{y}(\varphi)\bigr), \tag{3.2}$$

где $d_N(\,\cdot\,,\cdot\,)$ – метрика на N.

Для доказательства теоремы 3.2 при $r=0$ нам нужно показать, что индуцированное отображение $\mathfrak{g}\colon \mathfrak{L}^0\to\mathfrak{L}^0$ есть липшицеморфизм, удовлетворяющий условиям (IH1) и (IH2) из определения 2.2, и что системы $(\Lambda, S|_\Lambda)$ и $(\mathfrak{L}^0,\mathfrak{g})$ сопряжены. Покажем сначала, что $\mathfrak{g}$ удовлетворяет условию (IH2), если $\mathfrak{G}$ достаточно C^1-близко к $\mathfrak{F}$.

Лемма 3.1. *Для любого $\rho > 0$ существует такая C^1-окрестность отображения $\mathfrak{F}$, что для любого $\mathfrak{G}$ из этой окрестности выполнены следующие утверждения*:

1) *если $x \in W^s_{\mathrm{loc}}(y)$, то $d_{C^0}(\mathfrak{g}\bar{x}, \mathfrak{g}\bar{y}) \leqslant (\lambda + 3\rho)\, d_{C^0}(\bar{x}, \bar{y})$;*
2) *если $x \in W^u_{\mathrm{loc}}(y)$, то $d_{C^0}\big(\mathfrak{g}^{-1}\bar{x}, \mathfrak{g}^{-1}\bar{y}\big) \leqslant (\lambda + 3\rho)\, d_{C^0}(\bar{x}, \bar{y})$.*

Доказательство. Докажем первую часть леммы. Доказательство второй части аналогично.

Если $x \in W^s_{\mathrm{loc}}(y)$, то для любой точки $\big(\hat{x}(\varphi), \varphi\big)$ сильно устойчивое многообразие $W^{ss}_{\mathrm{loc}}\big(\hat{x}(\varphi), \varphi\big)$ содержит некоторую точку $\big(\hat{y}(\varphi_1), \varphi_1\big) \in \bar{y}$. Определим расстояние вдоль сильно устойчивого многообразия между точками $\big(\hat{x}(\varphi), \varphi\big)$ и $\big(\hat{y}(\varphi_1), \varphi_1\big)$ как нижнюю грань длин гладких кривых, соединяющих точки $\big(\hat{x}(\varphi), \varphi\big)$ и $\big(\hat{y}(\varphi_1), \varphi_1\big)$ и лежащих в $W^{ss}_{\mathrm{loc}}\big(\hat{x}(\varphi), \varphi\big)$. Теперь можно определить расстояние $\tilde{d}_{C^0}(\bar{x}, \bar{y})$ как максимум расстояний вдоль сильно устойчивых многообразий между точками $(\hat{x}(\varphi), \varphi)$ и $W^{ss}_{\mathrm{loc}}\big(\hat{x}(\varphi), \varphi\big) \cap \bar{y}$ по всем точкам слоя $\bar{x}$.

Предложение 3.1. *Если $x \in W^s_{\mathrm{loc}}(y)$, то $\tilde{d}_{C^0}(\mathfrak{g}\bar{x}, \mathfrak{g}\bar{y}) \leqslant (\lambda + 2\rho)\, \tilde{d}_{C^0}(\bar{x}, \bar{y})$.*

Доказательство. Возьмем такие точки $\big(\hat{x}(\varphi), \varphi\big) \in \bar{x}$ и $\big(\hat{y}(\varphi_1), \varphi_1\big) \in \bar{y}$, что $\big(\hat{y}(\varphi_1), \varphi_1\big) \in W^{ss}_{\mathrm{loc}}\big(\hat{x}(\varphi), \varphi\big)$ и расстояние между $\mathfrak{G}\big(\hat{x}(\varphi), \varphi\big)$ и $\mathfrak{G}\big(\hat{y}(\varphi_1), \varphi_1\big)$ вдоль сильно устойчивого многообразия равно $\tilde{d}_{C^0}(\mathfrak{f}\bar{x}, \mathfrak{f}\bar{y})$. Пусть γ^{ss} – гладкая кривая, соединяющая точки $\big(\hat{x}(\varphi), \varphi\big)$ и $\big(\hat{y}(\varphi_1), \varphi_1\big)$, лежащая в $W^{ss}_{\mathrm{loc}}\big(\hat{x}(\varphi), \varphi\big)$ и имеющая длину $|\gamma^{ss}|$, равную расстоянию между $\big(\hat{x}(\varphi), \varphi\big)$ и $\big(\hat{y}(\varphi_1), \varphi_1\big)$ вдоль сильно устойчивого многообразия. Ограничение отображения $\mathfrak{F}$ на сильно устойчивое многообразие сжимает с коэффициентом, меньшим $(\lambda + 2\rho)$ (если x и y достаточно близки). Если $\mathfrak{G}$ C^1-близко к $\mathfrak{F}$, то ограничение $\mathfrak{G}$ на свое сильно устойчивое многообразие сжимает с коэффициентом, не большим $(\lambda + 2\rho)$. Таким образом, $|\mathfrak{G}(\gamma^{ss})| \leqslant (\lambda + 2\rho)|\gamma^{ss}|$. Заметим, что расстояние между $\mathfrak{G}\big(\hat{x}(\varphi), \varphi\big)$ и $\mathfrak{G}\big(\hat{y}(\varphi_1), \varphi_1\big)$ вдоль сильно устойчивого многообразия не превосходит $|\mathfrak{G}(\gamma^{ss})|$. В итоге мы имеем

$$\tilde{d}_{C^0}(\mathfrak{g}\bar{x}, \mathfrak{g}\bar{y}) \leqslant |\mathfrak{G}(\gamma^{ss})| \leqslant (\lambda + 2\rho)|\gamma^{ss}| \leqslant (\lambda + 2\rho)\tilde{d}_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Предложение доказано.

Предложение 3.2. *Для любого $\alpha > 0$ существуют такие C^1-окрестность отображения $\mathfrak{F}$ и $\varepsilon > 0$, что для любого $\mathfrak{G}$ из этой окрестности и любых x, y, $x \in W^s_\varepsilon(y)$, выполнено*

$$(1 - \alpha)\, \tilde{d}_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}) \leqslant d_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}) \leqslant (1 + \alpha)\, \tilde{d}_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Доказательство. Если $v \in T_{(x,\varphi)}(N \times M) = T_x N \oplus T_\varphi$, то $v = v^b + v^c$, $v^b \in T_x N$, $v^c \in T_\varphi M$. Определим θ-конусы

$$K^b = \{v \mid \theta\|v^b\| > \|v^c\|\}, \qquad K^c = \{v \mid \theta\|v^c\| > \|v^b\|\}. \tag{3.3}$$

Если v – вектор из касательного пространства к центральному слою $\bar{x}$ отображения $\mathfrak{F}$ в точке $(x, \varphi) \in \bar{x}$, то $v \in K^c_{(x,\varphi)}$. Если v – вектор из касательного пространства к сильно устойчивому многообразию $W^{ss}_{\mathrm{loc}}(x, \varphi)$ в точке $(x_1, \varphi_1) \in W^{ss}_{\mathrm{loc}}(x, \varphi)$, то $v \in K^b_{(x_1,\varphi_1)}$.

То же выполнено для $\mathfrak{G}$, если $\mathfrak{G}$ C^1-близко к $\mathfrak{F}$, поскольку центральные слои (сильно устойчивые многообразия) отображения $\mathfrak{G}$ C^1-близки к центральным слоям (сильно устойчивым многообразиям) отображения $\mathfrak{F}$.

Пусть $\bigl(\hat{x}(\varphi),\varphi\bigr)\in\bar{x}$, $\bigl(\hat{y}(\varphi_1),\varphi_1\bigr)\in\bar{y}$, $\bigl(\hat{y}(\varphi_1),\varphi_1\bigr)\in W^{ss}_{\mathrm{loc}}\bigl(\hat{x}(\varphi),\varphi\bigr)$. Пусть γ^b – кривая в N, соединяющая точки x и y и реализующая расстояние между ними:

$$d=d_N(x,y)=|\gamma^b|.$$

Пусть γ^{ss} – кривая в $W^{ss}_{\mathrm{loc}}(x,\varphi)$, соединяющая точки (x,φ) и (y_1,φ_1) и реализующая расстояние (вдоль сильно устойчивого многообразия) между ними:

$$\tilde{d}=d_{\text{вд } W^{ss}_{\mathrm{loc}}(x,\varphi)}\bigl((x,\varphi),(y_1,\varphi_1)\bigr)=|\gamma^{ss}|.$$

Пусть $c=d_M(\varphi,\varphi_1)$ и кривая $l\subset M$ соединяет φ и φ_1 и реализует расстояние между ними:

$$c=d_M(\varphi,\varphi_1)=|l|.$$

Наконец, пусть γ^c – поднятие кривой l на слой $\hat{y}$, т. е. γ^c соединяет точки (y,φ) и (y_1,φ_1), и проекция γ^c на M совпадает с l. Через γ^{Δ} обозначим проекцию γ^c на N. Поскольку касательный вектор к γ^c в каждой ее точке лежит в K^c, то

$$|\gamma^{\Delta}|\leqslant\theta|l|=\theta c.$$

Обозначим через $p_M(\,\cdot\,)$ проекцию на M и через $p_N(\,\cdot\,)$ – проекцию на N. Поскольку касательный вектор к γ^{ss} в каждой ее точке лежит в K^b, то

$$|p_M(\gamma^{ss})|\leqslant\theta|p_N(\gamma^{ss})|.$$

Поскольку $c=d_M(\varphi,\varphi_1)\leqslant|p_M(\gamma^{ss})|$, то

$$\begin{aligned}d=|\gamma^b|&\leqslant|\gamma^c|+|\gamma^{ss}|\leqslant|\gamma^{\Delta}|+|l|+|\gamma^{ss}|\leqslant\theta c+c+|\gamma^s s|\\&\leqslant(1+\theta)|p_M(\gamma^{ss})|+|\gamma^{ss}|\leqslant(1+\theta)\theta|p_N(\gamma^{ss})|+|\gamma^{ss}|\\&\leqslant\bigl(1+(1+\theta)\theta\bigr)|\gamma^{ss}|=\bigl(1+(1+\theta)\theta\bigr)\,\tilde{d}.\end{aligned}$$

Далее, поскольку $W^{ss}_{\mathrm{loc}}(x,\varphi)$ C^1-гладко, то если (x,φ) и (y,φ) достаточно близки (что обеспечивается выбором достаточно малого ε), то

$$\tilde{d}\leqslant(1+\theta)d_{N\times M}\bigl((x,\varphi),(y_1,\varphi_1)\bigr).$$

Но тогда мы имеем

$$\begin{aligned}\tilde{d}&\leqslant(1+\theta)d_{N\times M}\bigl((x,\varphi),(y_1\varphi_1)\bigr)\leqslant(1+\theta)(|\gamma^b|+|\gamma^c|)\\&\leqslant(1+\theta)(|\gamma^b|+|l|+|\gamma^{\Delta}|)\leqslant(1+\theta)(d+c+\theta c)\leqslant(1+\theta)\bigl(d+\theta(1+\theta)\,\tilde{d}\bigr).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{1-\theta(1+\theta)^2}{1+\theta}\,\tilde{d}\leqslant d.$$

Таким образом, если θ и ε достаточно малы, то $(1-\alpha)\,\tilde{d}\leqslant d\leqslant(1+\alpha)\,\tilde{d}$. Поскольку это верно для каждой точки $\varphi\in M$, то

$$(1-\alpha)\,\tilde{d}_{C^0}(\bar{x},\bar{y})\leqslant d_{C^0}(\bar{x},\bar{y})\leqslant(1+\alpha)\,\tilde{d}_{C^0}(\bar{x},\bar{y}).$$

Предложение доказано.

Лемма 3.1 следует теперь из предложений 3.1 и 3.2. Действительно, если $x \in W^s_{\mathrm{loc}}(y)$, то

$$d_{C^0}(\mathfrak{g}\bar{x}, \mathfrak{g}\bar{y}) \leqslant (1+\alpha)\,\tilde{d}_{C^0}(\mathfrak{g}\bar{x}, \mathfrak{g}\bar{y}) \leqslant (1+\alpha)(\lambda+2\rho)\,\tilde{d}_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}) \leqslant \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\,(\lambda+2\rho)\,d_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Отсюда следует, что если α достаточно мало, то $d_{C^0}(\mathfrak{g}\bar{x}, \mathfrak{g}\bar{y}) \leqslant (\lambda+3\rho)\,d_{C^0}(\bar{x}, \bar{y})$. Лемма 3.1 доказана.

Итак, $\mathfrak{g}$ удовлетворяет условию (IH2), если $\mathfrak{G}$ достаточно C^1-близко к $\mathfrak{F}$.

Покажем теперь, что при тех же предположениях отображение $\mathfrak{g}\colon \mathfrak{L}^0 \to \mathfrak{L}^0$ удовлетворяет условию (IH1).

Поскольку Λ – локально максимальное гиперболическое множество отображения $S\colon N \to N$, существуют такие $\varepsilon > \delta > 0$, что выполнено следующее. Если $d_N(x,y) < \delta$, то существует единственная такая точка $w = w(x,y) \in \Lambda$, что $\{w\} = W^u_\varepsilon(x) \cap W^s_\varepsilon(y) = W^u_{3\varepsilon}(x) \cap W^s_{3\varepsilon}(y)$. Зафиксируем малое $\rho > 0$, $\rho \ll \delta$. Если $\mathfrak{G}$ достаточно C^1-близко к $\mathfrak{F}$, то C^0-расстояние между любым центральным слоем отображения $\mathfrak{G}$ и соответствующим центральным слоем $\mathfrak{F}$ не превосходит ρ (см. [13, теорема 6.8]).

Лемма 3.2. *Пусть задана константа $\rho > 0$. Для любого $\mathfrak{G}$, достаточно C^1-близкого к $\mathfrak{F}$, выполнено следующее. Если $\bar{x}$ и $\bar{y}$ – центральные слои отображения $\mathfrak{G}$, $\bar{x}, \bar{y} \in \mathfrak{L}^0$, и $d_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}) \leqslant \delta - 2\rho$, то существует единственный центральный слой $\bar{w} \in \mathfrak{L}^0$ отображения $\mathfrak{G}$ такой, что $\bar{w} \in W^s_{2\varepsilon}(\bar{x}) \cap W^u_{2\varepsilon}(\bar{y})$.*

Доказательство. Сначала покажем, что пересечение $W^u_{2\varepsilon}(x) \cap W^s_{2\varepsilon}(y) \subset \mathfrak{L}^0$ не может содержать больше одного центрального слоя отображения $\mathfrak{G}$. Допустим, что пересечение $W^u_\varepsilon(x) \cap W^s_\varepsilon(y)$ не пусто, и возьмем какую-нибудь точку $\bar{w} \in \mathfrak{L}^0$ в этом пересечении. Рассмотрим соответствующие центральные слои $\{x\} \times M$, $\{y\} \times M$ и $\{w\} \times M$ отображения $\mathfrak{F}$. Здесь $x = \Phi(\bar{x})$, $y = \Phi(\bar{y})$ и $w = \Phi(\bar{w})$. По предположению $d_{C^0}(\{x\} \times M, \bar{x}) < \rho$, $d_{C^0}\bigl(\{y\} \times M, \bar{y}\bigr) < \rho$ и $d_{C^0}\bigl(\{w\} \times M, \bar{w}\bigr) < \rho$. Более того, $d_{C^0}\bigl(\{S^n(x)\} \times M, \mathfrak{g}^n\bar{x}\bigr) < \rho$, $d_{C^0}\bigl(\{S^n(y)\} \times M, \mathfrak{g}^n\bar{y}\bigr) < \rho$ и $d_{C^0}\bigl(\{S^n(w)\} \times M, \mathfrak{g}^n\bar{w}\bigr) < \rho$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Вместе с леммой 3.1 это дает, что $w \in W^u_{2\varepsilon+2\rho}(x) \cap W^s_{2\varepsilon+2\rho}(y)$. Действительно, для всех $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\begin{aligned} d_N\bigl(S^k(w), S^k(x)\bigr) &= d_{C^0}\bigl(\{S^k(w)\} \times M, \{S^k(x)\} \times M\bigr) \\ &\leqslant d_{C^0}\bigl(\{S^k(w)\} \times M, \mathfrak{g}^k\bar{w}\bigr) + d_{C^0}\bigl(\mathfrak{g}^k\bar{w}, \mathfrak{g}^k\bar{x}\bigr) + d_{C^0}\bigl(\mathfrak{g}^k\bar{x}, \{S^k(x)\} \times M\bigr) \\ &\leqslant 2\rho + d_{C^0}(\bar{w}, \bar{x}) \leqslant 2\rho + 2\varepsilon, \end{aligned}$$

поэтому $w \in W^s_{2\varepsilon+2\rho}(x)$. Аналогично, $w \in W^u_{2\varepsilon+2\rho}(y)$.

Поскольку $d_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}) \leqslant \delta - 2\rho$, мы имеем

$$\begin{aligned} d_N(x,y) &= d_{C^0}\bigl(\{x\} \times M, \{y\} \times M\bigr) \\ &\leqslant d_{C^0}\bigl(\{x\} \times M, \bar{x}\bigr) + d_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}) + d_{C^0}\bigl(\bar{y}, \{y\} \times M\bigr) \leqslant (\delta - 2\rho) + \rho + \rho = \delta. \end{aligned}$$

В силу выбора δ и ε существует единственная точка $w \in W^s_{3\varepsilon}(x) \cap W^u_{3\varepsilon}(y) = W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y)$. Единственность доказана.

Теперь докажем существование. Поскольку $d_N(x,y) \leqslant \delta$, существует точка $w \in W^s_\varepsilon(x) \cap W^u_\varepsilon(y) \in \Lambda$. Рассмотрим соответствующий центральный слой

$\bar{w} = \Phi^{-1}(w) \in \mathfrak{L}^0$ отображения $\mathfrak{G}$. Для всех $k \in \mathbb{Z}^+$ мы имеем

$$d_{C^0}\big(\mathfrak{g}^k\bar{x}, \mathfrak{g}^k\bar{w}\big) \leqslant d_{C^0}\big(\mathfrak{G}^k\bar{w}, \{S^k(w)\} \times M\big) \\ + \ d_{C^0}\big(\{S^k(w)\} \times M, \{S^k(x)\} \times M\big) + d_{C^0}\big(\{S^k(x)\} \times M, \mathfrak{g}^k\bar{x}\big) \leqslant 2\rho + \varepsilon.$$

Таким образом, $\bar{x} \in W^s_{\varepsilon+2\rho}(\bar{x}) \subset \mathfrak{L}^0$. Лемма доказана, а вместе с ней и условие (IH1) для $\mathfrak{g}$.

Лемма 3.3. *Отображение $\mathfrak{g}\colon \mathfrak{L}^0 \to \mathfrak{L}^0$, индуцированное в пространстве центральных слоев отображения $\mathfrak{G}$ с C^0-метрикой, является липшицеморфизмом.*

Доказательство. Положим $L = \max_{(x,\varphi)\in N\times M} \|D\mathfrak{G}(x,\varphi)\|$. Напомним, что C^0-расстояние между центральными слоями $\bar{x}$ и $\bar{y}$ было определено как

$$d_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}) = \max_{\varphi\in M} d_N\big(\hat{x}(\varphi), \hat{y}(\varphi)\big).$$

Зафиксируем $\varphi \in M$. Пусть γ^b – кривая в $N \times \{\varphi\} \subset N \times M$, соединяющая точки $\big(\hat{x}(\varphi), \varphi\big)$ и $\big(\hat{y}(\varphi), \varphi\big)$ и реализующая расстояние между ними, $|\gamma^b| = d_N\big(\hat{x}(\varphi), \hat{y}(\varphi)\big)$. Обозначим через $p_M(\,\cdot\,)$ и $p_N(\,\cdot\,)$ проекции на M и N соответственно. Обозначим $\varphi_1 = p_M\big(\mathfrak{G}(\hat{x}(\varphi), \varphi)\big)$ и $\varphi_2 = p_M\big(\mathfrak{G}(\hat{y}(\varphi), \varphi)\big)$. Тогда кривая $\mathfrak{G}(\gamma^b)$ соединяет точки $\mathfrak{G}\big(\hat{x}(\varphi), \varphi\big) = \big(\widehat{S(x)}(\varphi_1), \varphi_1\big)$ и $\mathfrak{G}\big(\hat{y}(\varphi), \varphi\big) = \big(\widehat{S(y)}(\varphi_2), \varphi_2\big)$.

Обозначим через γ^c поднятие кривой $p_M\big(\mathfrak{G}(\gamma^b)\big) \subset M$ на слой $\overline{S(y)} = \mathfrak{g}\bar{y}$, $\gamma^c \subset \mathfrak{g}\bar{y}$, $p_M(\gamma^c) = p_M\big(\mathfrak{G}(\gamma^b)\big)$, причем γ^c соединяет точки $\big(\widehat{S(y)}(\varphi_1), \varphi_1\big) \in \mathfrak{g}\bar{y}$ и $\big(\widehat{S(y)}(\varphi_2), \varphi_2\big) \in \mathfrak{g}\bar{y}$. Из неравенства треугольника имеем

$$d_N\big(\widehat{S(x)}(\varphi_1), \widehat{S(y)}(\varphi_1)\big) \leqslant |\gamma^c| + |\mathfrak{G}(\gamma^b)|.$$

Определим θ-конусы K^b и K^c, как в (3.3).

Если $\mathfrak{G}$ C^1-близко к $\mathfrak{F}$, касательный вектор к кривой $\mathfrak{G}(\gamma^b)$ лежит в конусе K^b в каждой точке. Отсюда следует, что

$$\big|p_M\big(\mathfrak{G}(\gamma^b)\big)\big| \leqslant \theta\big|p_N\big(\mathfrak{G}(\gamma^b)\big)\big| \leqslant \theta|\mathfrak{G}(\gamma^b)| \leqslant \theta L|\gamma^b|.$$

Поскольку центральные слои отображения $\mathfrak{G}$ C^1-близки к центральным слоям $\mathfrak{F}$ и, в частности, касательный вектор к кривой γ^c лежит в конусе K^c в каждой точке, мы имеем

$$|p_N(\gamma^c)| \leqslant \theta|p_M(\gamma^c)| = \theta|p_M(\mathfrak{G}(\gamma^b))| \leqslant \theta|\mathfrak{G}(\gamma^b)| \leqslant \theta L|\gamma^b|.$$

Окончательно имеем

$$d_N\big(\widehat{S(x)}(\varphi_1), \widehat{S(y)}(\varphi_1)\big) \leqslant |\gamma^c| + |\mathfrak{G}(\gamma^b)| \leqslant |p_N(\gamma^c)| + |p_M(\gamma^c)| + |\mathfrak{G}(\gamma^b)| \\ \leqslant \theta L|\gamma^b| + L|\gamma^b| + L|\gamma^b| = (2+\theta)L|\gamma^b| = (2+\theta)\,L d_N\big(\hat{x}(\varphi), \hat{y}(\varphi)\big).$$

Поскольку это неравенство выполнено для всех $\varphi \in M$, мы имеем

$$d_{C^0}(\mathfrak{g}\bar{x}, \mathfrak{g}\bar{y}) \leqslant (2+\theta)\,L d_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Заметим, что поскольку $L = L(\mathfrak{G}) = \max_{(x,\varphi)\in N\times M} \|D\mathfrak{G}(x,\varphi)\|$ равномерно ограничено сверху для всех $\mathfrak{G}$ из малой C^1-окрестности $\mathfrak{F}$, константа Липшица для $\mathfrak{g}$ может быть выбрана равномерно по всем $\mathfrak{G}$ вблизи $\mathfrak{F}$.

Тем же способом можно доказать, что отображение $\mathfrak{g}^{-1}\colon \mathfrak{L}^0 \to \mathfrak{L}^0$ липшицево. Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Динамические системы* $(\Lambda, S|_\Lambda)$ *и* $(\mathfrak{L}^0, \mathfrak{g})$ *топологически сопряжены.*

Доказательство. Центральные слои были определены как прообразы $\bar{x} = \Phi^{-1}(x)$, $x \in \Lambda$. Поскольку $\Delta = \bigcup_{x\in\Lambda} \Phi^{-1}(x)$, отображение Φ индуцирует отображение $\bar{\Phi}\colon \mathfrak{L}^0 \to \Lambda$, $\bar{\Phi}(\bar{x}) = x$ на пространстве центральных слоев. Отображение Φ является полусопряжением, т. е. диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \xrightarrow{\mathfrak{G}|_\Delta} & \Delta \\ {\scriptstyle\Phi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\Phi} \\ \Lambda & \xrightarrow{S|_\Lambda} & \Lambda \end{array}$$

коммутативна. Следовательно, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{L}^0 & \xrightarrow{\mathfrak{g}} & \mathfrak{L}^0 \\ {\scriptstyle\bar{\Phi}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\bar{\Phi}} \\ \Lambda & \xrightarrow{S|_\Lambda} & \Lambda \end{array}$$

также коммутативна. Поэтому для доказательства того, что $\bar{\Phi}$ является сопряжением, необходимо лишь проверить, что $\bar{\Phi}$ является гомеоморфизмом. Поскольку отображение $\Phi\colon \Delta \to \Lambda$ непрерывно, отображение $\bar{\Phi}\colon \mathfrak{L}^0 \to \Lambda$ также непрерывно. Нам нужно лишь показать, что отображение $\bar{\Phi}^{-1}\colon \Lambda \to \mathfrak{L}^0$ непрерывно.

Допустим, что это неверно и существует последовательность точек $\{x_n\} \subset \Lambda$ и точка $y \in \Lambda$ такие, что $x_n \to y$ в Λ, но $\bar{x}_n \not\to \bar{y}$ в $\mathfrak{L}^0$. При необходимости переходя к подпоследовательности, мы можем предположить, что для некоторого $\xi > 0$ и всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено $d_{C^0}(\bar{x}_n, \bar{y}) > \xi$.

Пусть ε, δ и ρ такие же, как в лемме 3.2.

Предложение 3.3. *Существует такое* $l \in \mathbb{N}$, $l = l(\xi, \rho, \mathfrak{G})$, *что если* $d_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}) > \xi$, *то* $d_{C^0}\bigl(\mathfrak{g}^k\bar{x}, \mathfrak{g}^k\bar{y}\bigr) > 3\rho$ *для некоторого* $|k| \leqslant l$.

Доказательство. Предположим, что $d_{C^0}(\bar{x}, \bar{y}) < 3\rho \ll \delta < \varepsilon$ (в противном случае предложение тривиальным образом выполнено). По лемме 3.2 существует такая точка $\bar{z} \in \mathfrak{L}^0$, что $\bar{z} = W^s_{2\varepsilon}(\bar{x}) \cap W^u_{2\varepsilon}(\bar{y})$. Допустим, что $d_{C^0}(\bar{y}, \bar{z}) \geqslant d_{C^0}(\bar{x}, \bar{z})$ (в противном случае рассмотрим отрицательные итерации $\mathfrak{g}\colon \mathfrak{L}^0 \to \mathfrak{L}^0$). В частности, отсюда следует, что $d_{C^0}(\bar{y}, \bar{z}) \geqslant \frac{1}{2}\,\xi$.

По лемме 3.1 имеем

$$d_{C^0}\bigl(\mathfrak{g}^k\bar{z}, \mathfrak{g}^k\bar{y}\bigr) \geqslant (\lambda + 3\rho)^{-k} d_{C^0}(\bar{z}, \bar{y}) \geqslant \frac{1}{2}\,\xi(\lambda + 3\rho)^{-k},$$

если $d_{C^0}\bigl(\mathfrak{g}^i\bar{z}, \mathfrak{g}^i\bar{y}\bigr) < \varepsilon$ при $i = 0, 1, \ldots, k-1$ и

$$d_{C^0}\bigl(\mathfrak{g}^k\bar{z}, \mathfrak{g}^k\bar{x}\bigr) \leqslant (\lambda + 3\rho)^k d_{C^0}(\bar{z}, \bar{x})$$

для всех $k \in \mathbb{N}$.

Существуют две возможности: либо $2\varepsilon > d_{C^0}(\bar{z},\bar{y}) > \frac{6\rho\lambda}{1-\lambda^2}$, либо $d_{C^0}(\bar{z},\bar{y}) \leqslant \frac{6\rho\lambda}{1-\lambda^2} \ll 2\varepsilon$ (мы берем ρ достаточно малым, чтобы выполнялось $\frac{6\rho\lambda}{1-\lambda^2} \ll \delta < \varepsilon$).

В первом случае $d_{C^0}(\bar{x},\bar{z}) \leqslant d_{C^0}(\bar{z},\bar{y}) + 3\rho$ и $d_{C^0}(\mathfrak{g}\bar{y},\mathfrak{g}\bar{z}) \geqslant (\lambda+3\rho)^{-1} d_{C^0}(\bar{y},\bar{z})$,

$$d_{C^0}(\mathfrak{g}\bar{x},\mathfrak{g}\bar{z}) \leqslant (\lambda+3\rho) d_{C^0}(\bar{x},\bar{z}) \leqslant (\lambda+3\rho)\bigl(3\rho + d_{C^0}(\bar{z},\bar{y})\bigr).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
d_{C^0}(\mathfrak{g}\bar{x},\mathfrak{g}\bar{y}) &\geqslant d_{C^0}(\mathfrak{g}\bar{y},\mathfrak{g}\bar{z}) - d_{C^0}(\mathfrak{g}\bar{z},\mathfrak{g}\bar{x}) \\
&\geqslant \frac{1}{\lambda+3\rho}\, d_{C^0}(\bar{y},\bar{z}) - (\lambda+3\rho)(3\rho + d_{C^0}(\bar{z},\bar{y})) \\
&= \left(\frac{1}{\lambda+3\rho} - (\lambda+3\rho)\right) d_{C^0}(\bar{z},\bar{y}) - 3\rho(\lambda+3\rho) \\
&= \frac{1-(\lambda+3\rho)^2}{\lambda+3\rho}\, d_{C^0}(\bar{y},\bar{z}) - 3\rho(\lambda+3\rho) \\
&> \frac{\bigl(1-(\lambda+3\rho)^2\bigr)\, 6\rho\lambda}{(\lambda+3\rho)(1-\lambda^2)} - 3\rho(\lambda+3\rho) \geqslant \frac{6\rho\lambda}{\lambda+3\rho} - 3\rho(\lambda+3\rho) \geqslant 6\rho - 3\rho = 3\rho.
\end{aligned}$$

Во втором случае

$$d_{C^0}(\bar{z},\bar{x}) \leqslant d_{C^0}(\bar{z},\bar{y}) \leqslant \frac{6\rho\lambda}{1-\lambda^2} \ll 2\varepsilon.$$

Возьмем наименьшее $k \in \mathbb{N}$ такое, что $\frac{\varepsilon}{\lambda+3\rho} \leqslant d_{C^0}\bigl(\mathfrak{g}^k\bar{z},\mathfrak{g}^k\bar{y}\bigr) < \varepsilon$. Поскольку

$$d_{C^0}\bigl(\mathfrak{g}^k\bar{z},\mathfrak{g}^k\bar{y}\bigr) \geqslant (\lambda+3\rho)^{-k} d_{C^0}(\bar{z},\bar{y}) \geqslant \frac{1}{2}\,\xi(\lambda+3\rho)^{-k},$$

мы имеем оценку $\frac{1}{2}\,\xi(\lambda+3\rho)^{-k} \leqslant \varepsilon$, т. е. $|k| \leqslant l = l(\xi,\rho,\mathfrak{G})$.

Поскольку $d_{C^0}\bigl(\mathfrak{g}^k\bar{z},\mathfrak{g}^k\bar{x}\bigr) < d_{C^0}(\bar{x},\bar{z}) \leqslant \frac{6\rho\lambda}{1-\lambda^2} \ll \delta < \varepsilon$, мы имеем

$$d_{C^0}\bigl(\mathfrak{g}^k\bar{x},\mathfrak{g}^k\bar{y}\bigr) \geqslant d_{C^0}\bigl(\mathfrak{g}^k\bar{z},\mathfrak{g}^k\bar{y}\bigr) - d_{C^0}\bigl(\mathfrak{g}^k\bar{z},\mathfrak{g}^k\bar{x}\bigr) \geqslant \frac{\varepsilon}{\lambda+3\rho} - \frac{6\rho\lambda}{1-\lambda^2} > 3\rho,$$

если ρ достаточно мало. Предложение доказано.

Применим предложение 3.3 к $\bar{x}_n$ и $\bar{y}$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Переходя к подпоследовательности, можем предположить, что для некоторого $k \in \mathbb{Z}$ и для всех $n \in \mathbb{N}$ выполнено $d_{C^0}\bigl(\mathfrak{g}^k\bar{x}_n,\mathfrak{g}^k\bar{y}\bigr) > 3\rho$. Поскольку $x_n \to y$ в Λ, то $S^k(x_n) \to S^k(y)$ в Λ при $n \to \infty$. Следовательно, $d_{C^0}\bigl(\{S^k(x_n)\} \times M, \{S^k(y)\} \times M\bigr) \to 0$ при $n \to \infty$. Мы знаем, что $d_{C^0}\bigl(\mathfrak{g}^k\bar{x}_n, \{S^k(x_n)\} \times M\bigr) < \rho$ и $d_{C^0}\bigl(\mathfrak{g}^k\bar{y}, \{S^k(y)\} \times M\bigr) < \rho$, но это противоречит неравенству $d_{C^0}\bigl(\mathfrak{g}^k\bar{x}_n,\mathfrak{g}^k\bar{y}\bigr) > 3\rho$. Лемма доказана.

Леммы 3.1–3.4 доказывают теорему 3.2 для $r = 0$.

§ 4. Динамическая тривиализация и внутренняя гиперболичность для C^r-метрики

Чтобы определить C^r-метрику в пространстве центральных слоев $\mathfrak{L}$, нам потребуются некоторые технические приготовления.

4.1. Динамическая тривиализация. Здесь с небольшими необходимыми нам изменениями воспроизводим некоторые аргументы, предложенные Ч. Пью, М. Шубом и Э. Вилкинсон из [21], касающиеся тривиализации векторных расслоений с заданной динамикой в базе расслоения. В дальнейшем это позволит нам обойти трудности, связанные с нетривиальностью устойчивого и неустойчивого распределений, а также с нетривиальностью касательного расслоения многообразия M (центрального слоя).

Векторное расслоение E над компактной базой X всегда имеет тривиализующее расслоение (inverse bundle), расслоение E' над X, для которого существует автоморфизм векторных расслоений

$$\begin{tikzcd} E \oplus E' \arrow[r, "\tau"] \arrow[d] & \varepsilon \arrow[d] \\ X \arrow[r, "\mathrm{id}"] & X \end{tikzcd}$$

где ε – тривиальное расслоение: $\varepsilon = X \times \mathbb{R}^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Оказывается, верно более сильное утверждение.

Лемма 4.1 (Динамическая тривиализация) [21, лемма 3.1]. *Для заданного векторного расслоения E с компактной базой X существует такое тривиализующее расслоение E'' над X, что любой изоморфизм векторного расслоения, накрывающий гомеоморфизм базы расслоения*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

продолжается до изоморфизма векторных расслоений

$$\begin{tikzcd} E \oplus E'' \arrow[r, "T \oplus T''"] \arrow[d] & E \oplus E'' \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Если E и T гладкие, то E'' и T'' тоже гладкие.

Напомним, что функция, заданная на замкнутом множестве Λ многообразия N, называется *гладкой*, если она может быть продолжена до гладкой функции, определенной в некоторой окрестности Λ. Далее, напомним, что это означает в терминах векторных расслоений. Пусть E – непрерывное векторное расслоение над Λ, где Λ – замкнутое подмножество в N. Тогда E можно локально продолжить до непрерывного расслоения $\widetilde{E}$ над U, где U – окрестность Λ в N. Если одно такое продолжение $\widetilde{E}$ гладко, то E само называется гладким. Отображение расслоения $T\colon E \to E$ называется *гладким*, если оно продолжается до гладкого отображения гладкого локального продолжения E. Если E тривиализуемо, то $\widetilde{E}$ тоже тривиализуемо (по крайней мере, будучи ограниченным на достаточно малую окрестность Λ); если $\widetilde{E}$ – гладкое продолжение, то $\widetilde{E}$ гладко тривиализуемо.

Таким образом, из леммы 4.1 следует, что существуют гладкое расслоение H^b над $U(\Lambda)$, тривиализующее $T_{U(\Lambda)}N$, и C^r-изоморфизм $I^b\colon H^b \to H^b$, накрывающий S. Зафиксируем гладкое скалярное произведение на H^b. Умножая I^b на подходящую положительную константу, мы можем предположить, что I^b сжимает H^b намного сильнее, чем DS сжимает E^s. В $U(\Lambda)$ задана метрика Ляпунова, так что выполнено (3.1) и (3.1′). Вместе с выбранным скалярным произведением на H^b это задает выделенное скалярное произведение на $T_{U(\Lambda)}N \oplus H^b$. Тривиальное расслоение $U(\Lambda)\times\mathbb{R}^n$ имеет собственную внутреннюю евклидову структуру, и тривиализующий автоморфизм

$$T_{U(\Lambda)}N \oplus H^b \cong U(\Lambda)\times\mathbb{R}^n$$

не обязан быть изометрией.

Чтобы обойти отсутствие изометрии, воспользуемся следующим фактом из линейной алгебры. Если $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_1$ и $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_2$ – скалярные произведения на одном и том же конечномерном векторном пространстве V, то существует канонический изоморфизм $Q\colon V\to V$, который переводит одно скалярное произведение в другое, т. е. для любых $v, w \in V$

$$\langle Qv, Qw\rangle_2 = \langle v, w\rangle_1.$$

Чтобы найти Q, заметим, что для каждого $v\in V$ существует единственный вектор $v'\in V$ такой, что для любого $w\in V$

$$\langle v', w\rangle_2 = \langle v, w\rangle_1.$$

Отображение $T\colon v\mapsto v'$ является автоморфизмом пространства V, симметрическим и положительно определенным в соответствии со скалярным произведением $\langle\,\cdot\,,\cdot\,\rangle_2$. Положим $Q=\sqrt{T}$, где $\sqrt{T}$ – единственный симметрический положительно определенный квадратный корень из T. Тогда для любых $v, w\in V$

$$\langle Qv, Qw\rangle_2 = \langle Q^2 v, w\rangle_2 = \langle Tv, w\rangle_2 = \langle v, w\rangle_1.$$

Применяя этот факт послойно, получаем автоморфизм векторных расслоений

$$\begin{array}{ccc} U(\Lambda)\times\mathbb{R}^n & \xrightarrow{\;a\;} & T_{U(\Lambda)}\oplus H^b \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ U(\Lambda) & \xrightarrow{\;\mathrm{id}\;} & U(\Lambda) \end{array}$$

который переводит евклидову структуру в выделенное скалярное произведение. Поскольку оба скалярных произведения гладко зависят от слоя, автоморфизм a также является гладким.

Определим теперь D_S требованием коммутативности следующей диаграммы:

$$\begin{array}{ccc} U(\Lambda)\times\mathbb{R}^n & \xrightarrow{\;D_S\;} & U(\Lambda)\times\mathbb{R}^n \\ {\scriptstyle a}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle a} \\ T_{U(\Lambda)}\oplus H^b & \xrightarrow{\;DS\oplus I^b\;} & T_{U(\Lambda)}\oplus H^b \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ U(\Lambda) & \xrightarrow{\;S\;} & U(\Lambda) \end{array}$$

Ясно, что отображение $D_S\colon U(\Lambda)\times\mathbb{R}^n \hookleftarrow$ имеет класс гладкости C^r, множество Λ для него гиперболическое и слой $\mathbb{R}^n$ над точкой $x\in U(\Lambda)$ есть сумма устойчивого и неустойчивого подпространств $P^s_x = a^{-1}\bigl(E^s_x\oplus H^b_x\bigr)$ и $P^u_x = a^{-1}(E^u_x)$.

4.2. Определение C^r-метрики в пространстве центральных слоев. Мы уже определили C^0-метрику в пространстве центральных слоев (3.2). Теперь мы хотим определить C^r-расстояние между центральными слоями $\bar{x}$ и $\bar{y}$. Эти слои могут рассматриваться как графики отображений $\hat{x}\colon M\to N$ и $\hat{y}\colon M\to N$. Чтобы определить C^r-расстояние между отображениями $\hat{x}$ и $\hat{y}$, "поднимем" их в пространство струй (для наших целей это удобнее, чем стандартное определение, использующее фиксированный конечный набор карт). Для того чтобы определить расстояние в пространстве струй, мы используем тривиализацию касательных расслоений к $U(\Lambda)$ (построенную в п. 4.1) и к M.

Существует гладкое расслоение H^c над M, тривиализующее касательное расслоение TM, т. е. существует гладкий автоморфизм τ векторных расслоений:

$$\begin{array}{ccc} TM\oplus H^c & \xrightarrow{\ \tau\ } & M\times\mathbb{R}^m \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ M & \xrightarrow{\ \mathrm{id}\ } & M \end{array}$$

Будем считать, что на M задана такая риманова метрика, что изоморфизм $TM\oplus H^c\cong M\times\mathbb{R}^m$ является изометрией.

Рассмотрим центральный слой как график отображения $\hat{x}\colon M\to N$. Касательное пространство к $\bar{x}$ в точке $\bigl(\hat{x}(\varphi),\varphi\bigr)$ есть график линейного отображения

$$L_\varphi\colon T_\varphi M\to T_{\hat{x}(\varphi)}N.$$

По L_φ определим линейное отображение

$$\widetilde{L}_\varphi\colon T_\varphi M\oplus H^c_\varphi\to T_{\hat{x}(\varphi)}N\oplus H^b_{\hat{x}(\varphi)}$$

следующим образом:

$$T_\varphi M\oplus H^c_\varphi \xrightarrow{\ p\ } T_\varphi M \xrightarrow{\ L_\varphi\ } T_{\hat{x}(\varphi)}N \xrightarrow{\ i\ } T_{\hat{x}(\varphi)}N\oplus H^b_{\hat{x}(\varphi)}, \tag{4.1}$$

где p – проекция, i – включение.

Тем самым $\widetilde{L}_\varphi\in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, где $L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ – пространство линейных отображений из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, отображение $\hat{x}\colon M\to U(\Lambda)$ поднимается до отображения $\widehat{X}\colon M\to U(\Lambda)\times L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$, и мы можем определить C^1-расстояние между центральными слоями следующим образом:

$$d_{C^1}(\bar{x},\bar{y}) = \max_{\varphi\in M} d_{N^1}\bigl(\widehat{X}(\varphi),\widehat{Y}(\varphi)\bigr),\qquad N^1 = N\times L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n).$$

Соответственно, C^r-расстояние между $\bar{x}$ и $\bar{y}$ определяется индуктивно, как C^{r-1}-расстояние между графиками отображений $\widehat{X}$ и $\widehat{Y}$. Заметим только, что для тривиализации касательного пространства к $U(\Lambda)\times L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ необходимо тривиализовать лишь касательное пространство к $U(\Lambda)$; линейное пространство $L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ уже выделено как прямой сомножитель.

4.3. Продолжение отображения в базе до накрывающего изоморфизма. В дальнейшем нам потребуется продолжить малое возмущение отображения базы до отображения расслоения. Здесь мы покажем, что такое продолжение существует (предложение 4.2) .

Предложение 4.1. *Пусть X – гладкое риманово многообразие, отображение $\mathbf{h}\colon X \to X$ C^r-близко к $\mathrm{id}\colon X \to X$. Пусть $\Pi\colon E \to X$ – векторное расслоение над X (со слоем $\mathbb{R}^k$). Тогда существует изоморфизм векторного расслоения $\mathbf{H}\colon E \to E$, накрывающий $\mathbf{h}$:*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\mathbf{H}} & E \\ {\scriptstyle\Pi}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle\Pi} \\ X & \xrightarrow{\mathbf{h}} & X, \end{array}$$

и C^r-близкий к $\mathrm{id}\colon E \to E$

Доказательство. Введем риманову метрику на E следующим образом. Тривиализуем расслоение E так, что можно рассматривать его как подрасслоение тривиального расслоения $X \times \mathbb{R}^k$. Рассмотрим стандартную евклидову структуру на $\mathbb{R}^k$, соответствующую риманову структуру на $X \times \mathbb{R}^k$ и индуцированную метрику на пространстве расслоения E. Эта метрика индуцирует скалярное произведение на каждом слое, совпадает с римановой метрикой на X, и каждый слой ортогонален к касательному пространству к X.

Поскольку $\mathbf{h}$ близко к тождественному, то существует единственная минимальная геодезическая из x в $\mathbf{h}(x)$. Эта дуга является также геодезической в E, если рассматривать x и $\mathbf{h}(x)$ как точки в нулевом сечении. Действительно, иначе нашлась бы другая минимальная геодезическая, соединяющая x и $\mathbf{h}(x)$; она обязана целиком лежать в нулевом сечении (иначе проекция имела бы меньшую длину), но риманова метрика, индуцированная на нулевом сечении, совпадает с метрикой на X, тем самым мы получили две разных геодезических из x в $\mathbf{h}(x)$ на X. Противоречие.

Пространство векторного расслоения E является римановым многообразием. Рассмотрим параллельный перенос вдоль построенной геодезической. Касательное пространство к X перейдет в касательное пространство к X. Пространство, ортогональное к T_xX, перейдет в пространство, ортогональное к $T_{\mathbf{h}(x)}X$. Тем самым слой над x линейно отобразится в слой над $\mathbf{h}(x)$. Построенное отображение задает искомый изоморфизм $\mathbf{H}\colon E \to E$. Предложение доказано.

Предложение 4.2. *Пусть заданы отображение $\mathbf{f}\colon X \to X$, $\mathbf{f} \in C^r$, и накрывающий его изоморфизм $\mathbf{F}$ векторного расслоения $\Pi\colon E \to X$:*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\mathbf{F}} & E \\ {\scriptstyle\Pi}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle\Pi} \\ X & \xrightarrow{\mathbf{f}} & X \end{array}$$

Пусть отображение $\mathbf{g}\colon X \to X$ C^r*-близко к* $\mathbf{f}$*. Тогда найдется накрывающий его изоморфизм векторного расслоения* $\mathbf{G}\colon E \to E$, C^r*-близкий к* $\mathbf{F}$:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\mathbf{G}} & E \\ {\scriptstyle \Pi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \Pi} \\ X & \xrightarrow{\mathbf{g}} & X \end{array}$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $\mathbf{f}^{-1}\circ\mathbf{g}\colon X \to X$. Оно C^r-близко к $\mathrm{id}\colon X \to X$, следовательно (по предложению 4.1), существует изоморфизм $\mathbf{H}\colon E \to E$, накрывающий $\mathbf{f}^{-1}\circ\mathbf{g}$ и C^r-близкий к $\mathrm{id}\colon E \to E$. Но тогда отображение $\mathbf{F}\circ\mathbf{H}\colon E \to E$ является C^r-близким к $\mathbf{F}$ и накрывает $\mathbf{g}\colon X \to X$. Предложение доказано.

4.4. Шаг индукции. Мы доказываем теорему 3.2 по индукции. База индукции (теорема 3.2 верна для $r = 0$) проверена в леммах 3.1– 3.4. Проведем теперь шаг индукции.

Лемма 4.2. *Предположим, что теорема* 3.2 *верна для* $r = r_0 - 1$*. Тогда она верна также и для* $r = r_0 > 0$.

Доказательство. Касательные расслоения к многообразиям N и M тривиализованы с помощью расслоений H^b и H^c:

$$T_{U(\Lambda)}N \oplus H^b \cong U(\Lambda)\times\mathbb{R}^n, \qquad T_M \oplus H^c \cong M\times\mathbb{R}^m.$$

Обозначим через $\widetilde{T_{U(\Lambda)}N}\oplus\widetilde{H^b}$ расслоение над $U(\Lambda)\times M$ со слоем $T_xN\oplus H^b_x$ над точкой (x,φ). Обозначим через $\widetilde{TM}\oplus\widetilde{H^c}$ расслоение над $U(\Lambda)\times M$ со слоем $T_\varphi M\oplus H^c_\varphi$ над точкой (x,φ). Тем самым задано тривиальное расслоение с базой $U(\Lambda)\times M$:

$$\widetilde{T_{U(\Lambda)}N}\oplus\widetilde{H^b}\oplus\widetilde{TM}\oplus\widetilde{H^c}\cong U(\Lambda)\times M\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m.$$

Слоем этого расслоения в точке $(x,\varphi)\in U(\Lambda)\times M$ является $T_xN\oplus H^b_x\oplus T_\varphi M\oplus H^b_\varphi$.

Отображение $\mathfrak{F}\colon U(\Lambda)\times M \hookleftarrow$ имеет вид $\mathfrak{F} = S\times\mathrm{id}_M$. Поэтому можно определить отображение $D_{\mathfrak{F}}\colon U(\Lambda)\times M\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \hookleftarrow$, накрывающее $\mathfrak{F}$, как $D_{\mathfrak{F}} = D_S\oplus\mathrm{id}$. Действительно, отображение $D_S\colon U(\Lambda)\times\mathbb{R}^n \hookleftarrow$ накрывает $S\colon U(M)\hookleftarrow$, а отображение $\mathrm{id}\colon M\times\mathbb{R}^m \hookleftarrow$ накрывает $\mathrm{id}_M\colon M\hookleftarrow$, следовательно, отображение $D_{\mathfrak{F}} = D_S\oplus\mathrm{id}$ накрывает отображение $\mathfrak{F} = S\times\mathrm{id}_M$.

Определенное таким образом отображение $D_{\mathfrak{F}}$ индуцирует отображение

$$\mathfrak{F}^*\colon L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)\times U(\Lambda)\times M\hookleftarrow,$$

накрывающее отображение $\mathfrak{F}$. Действительно, слой $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ над точкой (x,φ) переводит (линейно) отображение $D_{\mathfrak{F}}$ в слой $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n$ над точкой $\mathfrak{F}(x,\varphi) = (S(x),\varphi)$. Тем самым график линейного отображения $L\colon\mathbb{R}^m_{(x,\varphi)}\to\mathbb{R}^M_{(x,\varphi)}$ перейдет в график некоторого линейного отображения $L^*\colon\mathbb{R}^m_{\mathfrak{F}(x,\varphi)}\to\mathbb{R}^M_{\mathfrak{F}(x,\varphi)}$. Положим $\mathfrak{F}^*(L,x,\varphi) = (L^*,S(x),\varphi)$.

Предложение 4.3. *Отображение* $\mathfrak{F}^*\colon L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)\times U(\Lambda)\times M \hookleftarrow$ *имеет вид* $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}^*_{\mathrm{hyp}}\times \mathrm{id}_M$, *где* $\mathfrak{F}^*_{\mathrm{hyp}}\colon L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)\times U(\Lambda)\hookleftarrow$ – *гиперболическое отображение с константой* λ (*т. е. с той же константой, что и отображение* $S\colon U(\Lambda)\hookleftarrow$).

Доказательство. Отображение $D_S\colon U(\Lambda)\times\mathbb{R}^n\hookleftarrow$ оставляет инвариантными подрасслоения P^s и P^u, $P^s\oplus P^u = U(\Lambda)\times\mathbb{R}^n$, причем слои $P^s_x = a^{-1}\big(E^s_x\oplus H^b_x\big)$ оно сжимает с коэффициентом не больше λ, а слои $P^u_x = a^{-1}(E^u_x)$ растягивает с коэффициентом не меньше λ^{-1}. Следовательно, расслоение над $U(\Lambda)\times M$ со слоем $L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ распадается в сумму двух инвариантных под действием $\mathfrak{F}^*$ подрасслоений:

$$L_x(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n) = L_x(\mathbb{R}^m,P^s_x)\oplus L_x(\mathbb{R}^m,P^u_x),$$

причем слои $L_x(\mathbb{R}^m,P^s_x)$ отображение $\mathfrak{F}^*$ сжимает с коэффициентом не больше λ, а слои $L_x(\mathbb{R}^m,P^u_x)$ растягивает с коэффициентом не меньше λ^{-1}. Действительно, это прямо следует из того, что если $\mathfrak{F}^*(L,x,\varphi) = (L^*,S(x),\varphi)$, то $L^* = (D_S)_x L$.

Осталось заметить, что действие отображения $\mathfrak{F}^*$ на слой $L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$ над точкой $(x,\varphi)\in U(\Lambda)\times M$ зависит только от $x\in U(\Lambda)$ и не зависит от $\varphi\in M$. Предложение доказано.

Если отображение $\mathfrak{F}$ имеет класс гладкости C^{r_0+1}, то отображение $\mathfrak{F}^*$ имеет класс гладкости C^{r_0}, и, следовательно, к нему (так как по предложению 4.3 $\mathfrak{F}^* = \mathfrak{F}^*_{\mathrm{hyp}}\times\mathrm{id}_M$) применима теорема 3.2 (которая по предположению индукции верна при $r = r_0-1$), т. е. если отображение $\mathfrak{G}^*$ C^{r_0}-близко к отображению $\mathfrak{F}^*$ в окрестности частично гиперболического множества, то отображение, индуцированное в пространстве центральных слоев отображения $\mathfrak{G}^*$ с C^{r_0-1}-метрикой, является внутренне гиперболическим с константой $\lambda' > \lambda$, как утверждается в теореме 3.2.

Пусть отображение $\mathfrak{G}\colon U(\Lambda)\times M$ достаточно C^{r_0+1}-близко к $\mathfrak{F}$. Построим такое отображение $\mathfrak{G}^*$, которое будет C^{r_0}-близко к $\mathfrak{F}^*$ в окрестности частично гиперболического множества, причем центральные слои отображения $\mathfrak{G}^*$ совпадают с поднятием (в силу (3.3)) центральных слоев отображения $\mathfrak{G}$. Поскольку в этом случае C^{r_0}-метрика в пространстве центральных слоев отображения $\mathfrak{G}$ совпадает с C^{r_0-1}-метрикой в пространстве центральных слоев отображения $\mathfrak{G}^*$, этим будет доказана теорема 3.2 для $r = r_0$.

Для того чтобы построить требуемое отображение $\mathfrak{G}^*$, построим сначала отображение расслоения $D_{\mathfrak{G}}\colon U(\Lambda)\times M\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\hookleftarrow$, C^{r_0}-близкое к отображению $D_{\mathfrak{F}}$ и накрывающее отображение $\mathfrak{G}$. Для этого вспомним, что

$$U(\Lambda)\times M\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m \cong \widetilde{T_{U(\Lambda)}N}\oplus\widetilde{H^b}\oplus\widetilde{TM}\oplus\widetilde{H^c}.$$

Построим отображение $D_{\mathfrak{G}}$ как прямую сумму отображений $D\mathfrak{G}\colon \widetilde{T_{U(\Lambda)}N}\oplus\widetilde{TM}\hookleftarrow$, $D^b_{\mathfrak{G}}\colon\widetilde{H^b}\hookleftarrow$ и $D^c_{\mathfrak{G}}\colon\widetilde{H^c}\hookleftarrow$, накрывающих $\mathfrak{G}$. Отображение $D_{\mathfrak{G}}$ есть дифференциал отображения $\mathfrak{G}$, оно C^{r_0}-близко к отображению $D_{\mathfrak{F}}$. Отображение $D^b_{\mathfrak{G}}$ (по предложению 3.3) можно взять C^{r_0}-гладким и C^{r_0}-близким к отображению $\widetilde{I}^b$, где $\widetilde{I}^b$ – продолжение автоморфизма $I^b\colon H^b\to H^b$ до отображения, накрывающего $\mathfrak{F}$, а именно $\widetilde{I}^b\big(H^b_{(x,\varphi)}\big) = \big(I^b(H^b_x)\big)_{(S(x),\varphi)}$. Наконец, отображение $D^c_{\mathfrak{G}}$ (снова по предложению 3.3) можно взять C^{r_0}-близким к отображению

$\widetilde{\mathrm{id}}\colon \widetilde{H^c} \to \widetilde{H^c}$, где $\widetilde{\mathrm{id}}$ – продолжение отображения $\mathrm{id}\colon H^c \to H^c$ до отображения, накрывающего $\mathfrak{F}$, а именно $\widetilde{\mathrm{id}}\big(H^c_{(x,\varphi)}\big) = H^c_{(S(x),\varphi)}$. Тогда отображение $D_{\mathfrak{G}} = D\mathfrak{G} \oplus D^b_{\mathfrak{G}} \oplus D^c_{\mathfrak{G}}$ будет C^{r_0}-близко к отображению $D_{\mathfrak{F}} = D\mathfrak{F} \oplus \widetilde{I^b} \oplus \widetilde{\mathrm{id}}$.

Пусть $L_1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \subset L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ – множество линейных отображений с нормой не больше 1. Определим отображение $\mathfrak{G}^*\colon L_1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times U(\Lambda) \times M \hookleftarrow$, накрывающее $\mathfrak{G}\colon U(\Lambda) \times M \hookleftarrow$, следующим образом. Если $L \in L_1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, то положим

$$\mathfrak{G}^*(L, x, \varphi) = \big(L^*, \mathfrak{G}(x, \varphi)\big),$$

где график отображения L^* есть образ графика отображения L под действием $D_{\mathfrak{G}}$. Если матрица отображения $D_{\mathfrak{G}}$, ограниченного на слой $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ над точкой (x, φ), имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$, то

$$L^* = (AL + B)(CL + D)^{-1}.$$

Поскольку $D_{\mathfrak{G}}$ близко к $D_{\mathfrak{F}}$, матрица отображения $D_{\mathfrak{F}}$ имеет вид $\left(\begin{smallmatrix} (D_S)_x & 0 \\ 0 & E \end{smallmatrix}\right)$, а $L \in L_1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ (т. е. $\|L\| \leqslant 1$), то отображение $\mathfrak{G}^*$ корректно определено и C^{r_0}-близко к ограничению отображения $\mathfrak{F}^*$ на $L_1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times U(\Lambda) \times M$.

Итак, нам осталось лишь доказать следующее утверждение.

Предложение 4.4. *Центральные слои отображения G^* совпадают с поднятиями* (*в силу* (4.1)) *центральных слоев отображения G.*

Доказательство. Отображение $\mathfrak{F}^*$ имеет инвариантное частично гиперболическое множество $\Delta^*_{\mathfrak{F}} = \{0\} \times \Lambda \times M$, гомеоморфное $\Lambda \times M$, которое является максимальным инвариантным множеством в некоторой своей окрестности. Отображение $\mathfrak{G}^*$, являясь C^{r_0}-близким к $\mathfrak{F}^*$, также имеет частично гиперболическое множество $\Delta^*_{\mathfrak{G}}$, гомеоморфное $\Lambda \times M$, являющееся максимальным инвариантным множеством в некоторой своей окрестности.

Рассмотрим ограничение расслоения над $U(\Lambda) \times M$ со слоем $L_1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ на инвариантное частично гиперболическое множество $\Delta_{\mathfrak{G}}$ отображения $\mathfrak{G}$. Обозначим это ограничение через $L_{\mathfrak{G}}$. Отображение $\mathfrak{G}^*$ накрывает отображение $\mathfrak{G}$, поэтому множество $\Delta^*_{\mathfrak{G}}$ можно рассматривать как сечение расслоения $L_{\mathfrak{G}}$. То, что $\Delta^*_{\mathfrak{G}}$ является максимальным инвариантным множеством для $\mathfrak{G}^*$, означает, что $\Delta^*_{\mathfrak{G}}$ является единственным инвариантным сечением расслоения $L_{\mathfrak{G}}$ под действием $\mathfrak{G}^*|_{L_{\mathfrak{G}}}$. Формула (3.3) определяет отображение $\Delta_{\mathfrak{G}}$ в $L_{\mathfrak{G}}$. При этом отображении оператор $L\colon T_\varphi M \to T_x N$, $(x, \varphi) \in \Delta_{\mathfrak{G}}$, график которого есть касательное пространство к центральному слою, проходящему через точку (x, φ), переходит в $L^*\colon T_\varphi M \oplus H^c_\varphi \to T_x N \oplus H^b_x$, где $H^c_\varphi \subset \operatorname{Ker} L^*$, $\operatorname{Im} L^* \subset T_x N$. Но поскольку касательные пространства к центральным слоям отображения $\mathfrak{G}$ инвариантны под действием $D\mathfrak{G}$, а отображение $D_{\mathfrak{G}}$ выбрано так, что разложение $T(M \times N) \oplus \widetilde{H^b} \oplus \widetilde{H^c}$ является инвариантным, то сечение, определяемое таким поднятием, обязано быть инвариантным относительно $\mathfrak{G}^*|_{L_{\mathfrak{G}}}$. В силу единственности оно совпадает с $\Delta^*_{\mathfrak{G}}$, что и означает, что центральные слои отображения $\mathfrak{G}^*$ совпадают с поднятиями (в силу (4.1)) центральных слоев отображения $\mathfrak{G}$. Предложение доказано.

Итак, лемма 4.2 доказана. Вместе с базой индукции это доказывает теорему 3.2, и применение теоремы 2.3 дает теорему B′.

§ 5. Некоторые свойства частично гиперболических множеств: доказательство теоремы A

Здесь мы доказываем теорему A и добавление к ней.

Заметим, что для доказательства на самом деле достаточно п. 5.3. Тем не менее мы сначала описываем свойства косых произведений над сдвигом Бернулли и их гладких реализаций. Эта конструкция несколько проще и имеет отдельные приложения. Например, такие системы появляются при бифуркациях седлоузлового цикла, обладающего несколькими гомоклиническими поверхностями (теорема B из [9]).

5.1. Ступенчатые и мягкие косые произведения над сдвигом Бернулли. Здесь приводятся некоторые определения и утверждения, которые понадобятся в п. 5.2. Пусть Σ^2 – пространство всех бесконечных в обе стороны последовательностей из 0 и 1, а σ – сдвиг Бернулли $\Sigma^2\to\Sigma^2$. Метрика на Σ^2 определяется следующим образом:

$$d_{\Sigma^2}(\omega,\omega')=2^{-k},\qquad k=\min\bigl\{j\in\mathbb{Z}^+ | \omega_j\ne\omega'_j \text{ или } \omega_{-j}\ne\omega'_{-j}\bigr\}. \tag{5.1}$$

Заметим, что сдвиг Бернулли $\sigma\colon\Sigma^2\to\Sigma^2$ внутренне гиперболичен, если Σ^2 снабжено метрикой (5.1).

Рассмотрим отображение

$$F\colon \Sigma^2\times S^1\to\Sigma^2\times S^1,\qquad (\omega,\varphi)\mapsto\bigl(\sigma\omega, f_{\omega_0}(\varphi)\bigr). \tag{5.2}$$

Заметим, что отображение F, применяемое к слою над точкой ω в базе, зависит не от всей последовательности ω, а только от ее элемента ω_0. Будем называть такие косые произведения *ступенчатыми* косыми произведениями.

Рассмотрим также отображение

$$G\colon \Sigma^2\times S^1\to\Sigma^2\times S^1,\qquad (\omega,\varphi)\mapsto\bigl(\sigma\omega, f_{\omega}(\varphi)\bigr), \tag{5.3}$$

где $f_\omega\colon S^1\to S^1$ зависит от всей последовательности ω. Назовем такие косые произведения *мягкими*.

В работе [10] доказана следующая теорема (здесь мы приводим измененную, но эквивалентную формулировку).

Теорема 5.1. *Существуют такие диффеоморфизмы $g_0,g_1\colon S^1\to S^1$, g_0 и g_1 могут быть взяты произвольно близкими к $\mathrm{id}\in\mathrm{Diff}^2(S^1)$, и такой интервал $I\subset\mathbb{R}$, $0\in I$, что для любых $C>1$, $\beta>\log_2 L$, где*

$$L=\max_{i\in\{0,1\}}\max_{\varphi\in S^1}\bigl(\|Dg_i(\varphi)\|,\|Dg_i^{-1}(\varphi)\|\bigr), \tag{5.4}$$

и достаточно малых окрестностей $U_0(g_0)$ и $U_1(g_1)$ в $\mathrm{Diff}^2(S^1)$ выполнено следующее. Предположим, что отображение G, (5.3), удовлетворяет следующим условиям:

$$f_\omega\in U_{\omega_0}\quad \textit{для любого}\quad \omega\in\Sigma^2, \tag{5.5}$$

$$d_{C^1}(f_\omega,f_{\omega'})\leqslant C\bigl(d_{\Sigma^2}(\omega,\omega')\bigr)^\beta\quad \textit{для любого}\quad \omega,\omega'\in\Sigma^2. \tag{5.6}$$

Тогда отображение G обладает следующими свойствами:

(i) *периодические орбиты отображения G с мультипликатором вдоль окружности по модулю, бо́льшим единицы, плотны в $\Sigma^2\times S^1$; то же выполнено для периодических орбит с мультипликатором по модулю меньше единицы;*

(ii) *для любого $\lambda\in I$ существует орбита, плотная в $\Sigma^2\times S^1$, с показателем Ляпунова вдоль окружности, равным λ;*

(iii) *если орбита последовательности $\omega\in\Sigma^2$ под действием сдвига Бернулли σ плотна в Σ^2, то для любого $\varphi\in S^1$ орбита точки (ω,φ) под действием G плотна в $\Sigma^2\times S^1$.*

Замечание 5.1. Для ступенчатых косых произведений выполнено следующее утверждение (см. [9], [10]). Существует такой интервал $I\subset\mathbb{R}$, $0\in I$, и такие открытые множества $U_0,U_1\subset\mathrm{Diff}^1(S^1)$, что для любых $f_0,f_1,f_j\in U_j$ отображение F, (5.2), имеет свойства (i)–(iii), сформулированные в теореме 5.1 для отображения G.

5.2. Гладкая реализация и доказательство теоремы A. Рассмотрим стандартную подкову Смейла, реализованную как отображение попарно непересекающихся прямоугольников. Пусть $D=D_0\cup D_1$, $D'=D'_0\cup D'_1$, $D_0\cap D_1=\varnothing$, $D'_0\cap D'_1=\varnothing$. Пусть $S\colon D\to D'$ – такое отображение, что $S|_{D_i}\colon D_i\to D'_i$ – ограничение на D_i линейного гиперболического отображения с константами сжатия и растяжения, равными $\lambda\in(0,1)$ и $\lambda^{-1}>1$ соответственно. Заметим, что константа λ может быть выбрана произвольно малой с помощью подходящего выбора прямоугольников D и D'.

Хорошо известно, что отображение S имеет инвариантное множество Λ, гомеоморфное Σ^2, и $S|_\Lambda$ сопряжено сдвигу Бернулли $\sigma\colon\Sigma^2\to\Sigma^2$.

Рассмотрим локально постоянную функцию $i\colon D\to\{0,1\}$, определенную следующим образом: $i(x)=j\Leftrightarrow x\in D_j$. Косое произведение

$$\mathfrak{F}\colon D\times S^1\to D'\times S^1,\qquad \mathfrak{F}(x,\varphi)=\bigl(S(x),f_{i(x)}(\varphi)\bigr),\tag{5.7}$$

называется *гладкой реализацией* системы (5.2).

Легко видеть, что $\mathfrak{F}|_{\Lambda\times S^1}$ сопряжено отображению F, (5.2). Множество $\Lambda\times S^1$ является частично гиперболическим для $\mathfrak{F}$, а его центральные слои являются слоями проекции на первый сомножитель: $\Lambda\times S^1\to\Lambda$, $\Lambda\simeq\Sigma^2$.

Идея доказательства теоремы A состоит в следующем. Возьмем g_0 и g_1, как в теореме 5.1. Рассмотрим отображение $\mathfrak{F}$, (5.7), – гладкую реализацию отображения F, (5.2), с $f_0=g_0$ и $f_1=g_1$. Если $\mathfrak{G}$ есть C^2-малое возмущение такого отображения $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{G}$ также имеет частично гиперболическое инвариантное множество, которое сопряжено мягкому косому произведению G, (5.3). Более того, ограничение этого сопряжения на любой центральный слой является диффеоморфизмом. Если бы это отображение G удовлетворяло условиям теоремы 5.1, то отображение $\mathfrak{G}$ обладало бы свойствами (i) и (ii) из теоремы A. Чтобы быть уверенными, что отображение G действительно удовлетворяет условиям теоремы 5.1, необходимо действовать следующим образом.

Пусть S – стандартная подкова Смейла, $S\colon D\to D'$. Рассмотрим отображение $\mathfrak{F}_0=S\times\mathrm{id}_{S^1}$. Тогда по теореме B существует такая C^2-окрестность (обозначим эту окрестность через V_1) отображения $\mathfrak{F}_0$, что для любого отображения $\mathfrak{G}$ из V_1 его центральные слои гёльдерово зависят от точки в Λ в C^1-норме с равномерными показателем Гёльдера и константой Гёльдера. Системы $(\Lambda,S|_\Lambda)$ и (Σ^2,σ) сопряжены, и сопряжение также гёльдерово. Следовательно, существуют такие константы $C>1$ и $\beta>0$, что ограничение любого отображения

$\mathfrak{G} \in V_1$ на его инвариантное частично гиперболическое множество сопряжено некоторому отображению G вида (5.3), для которого выполнено условие (5.6).

Далее, определим функцию $L\colon V_1 \to \mathbb{R}$ следующим образом. Если ограничение отображения $\mathfrak{G} \in V_1$ на его инвариантное частично гиперболическое множество сопряжено отображению G, (5.3), то

$$L(\mathfrak{G}) = \max_{\omega\in\Sigma^2} \max_{\varphi\in S^1} \bigl(\|Df_\omega(\varphi)\|, \|Df_\omega^{-1}(\varphi)\|\bigr).$$

Заметим, что $L(\mathfrak{F}_0) = 1$. Существует такая C^2-окрестность отображения $\mathfrak{F}_0$ (обозначим ее через V_2), что $V_2 \subset V_1$ и для любого $\mathfrak{G} \in V_2$ значение $L(\mathfrak{G})$ близко к 1, а именно $\log_2 L < \beta$.

По теореме 5.1 диффеоморфизмы g_0 и g_1 могут быть взяты произвольно близкими к $\mathrm{id} \in \mathrm{Diff}^2(S^1)$. Возьмем такие диффеоморфизмы g_0 и g_1, что гладкая реализация отображения F, (4.1), с $f_0 = g_0$ и $f_1 = g_1$ принадлежит V_2. Тогда для любого достаточно C^2-малого возмущения $\mathfrak{G}$ этой гладкой реализации его ограничение на инвариантное частично гиперболическое множество сопряжено мягкому косому произведению G, (5.3), для которого выполнены все условия теоремы 5.1 (условие (5.6) и неравенство $\log_2 L < \beta$, где L такое же, как в (5.4), выполнены в силу выбора V_1 и V_2; условие (5.5) выполнено, потому что центральные слои возмущенного отображения C^2-близки к центральным слоям рассматриваемой гладкой реализации). Итак, G обладает свойствами (i) и (ii) из утверждения теоремы 5.1, поэтому $\mathfrak{G}$ имеет свойства (i) и (ii) из утверждения теоремы А. Теорема А доказана.

5.3. Косые произведения над соленоидом и доказательство добавления. Конструкция, с помощью которой доказывается добавление, очень похожа на конструкцию, приведенную в пп. 5.1, 5.2. Единственное отличие состоит в том, что теперь мы должны рассмотреть малые возмущения прямого произведения отображения, имеющего гиперболический аттрактор (вместо подковы Смейла), на тождественное отображение. Возьмем для этого соленоид Смейла–Вильямса: $\mathbf{S}\colon T \to T$, $T = S^1 \times B$, $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 2\}$, $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $\mathbf{S}(s,z) = \bigl(2s, \frac{1}{3}z + \exp\{2\pi i s\}\bigr)$. Рассмотрим теперь косое произведение

$$G\colon T \times S^1 \to T \times S^1, \qquad (x,\varphi) \mapsto \bigl(\mathbf{S}(x), f_x(\varphi)\bigr), \quad x \in T, \quad \varphi \in S^1. \tag{5.8}$$

При любом выборе f_x отображение (5.8) имеет максимальный аттрактор Δ. Обозначим его проекцию на базу T вдоль слоев S^1 через Λ. Последнее множество является настоящим соленоидом, вне зависимости от f_x.

Аналогом теоремы 5.1 для косых произведений над соленоидом является следующая теорема (общий подход и полное доказательство свойства (i) приведены в работе [10]).

Теорема 5.2. *Для любых $C > 1, \beta > 0$ произвольно близко к $\mathrm{id} \in \mathrm{Diff}^2(S^1)$ существуют такие C^2-открытые множества $U_0, U_1 \subset \mathrm{Diff}^2(S^1)$, что выполнено следующее. Пусть отображение G, (5.8), удовлетворяет следующим условиям*:

1) $f_x \in U_0$, *если* $x = (s,z) \in \Lambda_0 := \bigl\{\frac{1}{8} \leqslant s \leqslant \frac{1}{2}\bigr\}$;

2) $f_x \in U_1$, *если* $x = (s,z) \in \Lambda_1 := \bigl\{\frac{5}{8} \leqslant s \leqslant 1\bigr\}$;

3) *если* $L = \max_{x\in\Lambda} \max_{\varphi\in S^1}\bigl(\|Df_x(\varphi)\|, \|Df_x^{-1}(\varphi)\|\bigr)$, *то* $2^{-\beta}L < 1$;

4) $\|D^2_\varphi f_x\| < T$, $\|D^2_\varphi f_x^{-1}\| < T$ *для некоторой константы* $T > 0$ *и любых* x, φ;

5) $d_{C^1}(f_x, f_y) \leqslant C\big(d_\Lambda(x,y)\big)^\beta$ *для любых* $x, y \in \Lambda$.

Тогда отображение G *имеет следующие свойства*:

(i) *периодические орбиты отображения* G *с мультипликатором вдоль окружности по модулю больше единицы плотны в* $\Lambda \times S^1$; *то же выполнено для периодических орбит с мультипликатором вдоль окружности по модулю меньше единицы*;

(ii) *существует такой интервал* $I \subset \mathbb{R}$, $0 \in I$, *что для любого* $\lambda \in I$ *существует плотная в* $\Lambda \times S^1$ *орбита с показателем Ляпунова вдоль окружности, равным* λ;

(iii) *если орбита точки* $x \in \Lambda$ *под действием отображения* $\mathbf{S}\colon \Lambda \to \Lambda$ *плотна в* Λ, *то для любого* $\varphi \in S^1$ *орбита точки* (x, φ) *под действием* G *плотна в* $\Lambda \times S^1$.

Теперь мы можем рассуждать почти так же, как и в п. 5.2. А именно, рассмотрим прямое произведение отображения соленоида Смейла–Вильямса $\mathbf{S}$ на тождественное отображение окружности. По теореме B существует такая C^2-окрестность W_1 отображения $\mathbf{S} \times \mathrm{id}$, что любое отображение $\mathfrak{G}$ из W_1 имеет частично гиперболическое множество Δ с центральными слоями класса гладкости C^2, который гёльдерово зависит от точки в базе в C^1-норме. Более того, показатель Гёльдера и константа Гёльдера могут быть выбраны одними и теми же для любого отображения $\mathfrak{G}$ из W_1. Из этого следует, что любое отображение $\mathfrak{G} \in W_1$, ограниченное на свое инвариантное частично гиперболическое множество Δ, сопряжено косому произведению G, (5.8), которое удовлетворяет свойствам 4), 5) с равномерными константами $\beta > 0$ и $C > 1$. Ограничение этого сопряжения на любой центральный слой является диффеоморфизмом. При фиксированном $\beta > 0$ мы можем выбрать другую окрестность $W_2 \subset W_1$ таким образом, что для любого отображения $\mathfrak{G} \in W_2$ соответствующее косое произведение дополнительно удовлетворяет свойству 3).

Рассмотрим множества $U_0, U_1 \subset \mathrm{Diff}^2(S^1)$ такие, как в теореме 5.2. Если U_0, U_1 достаточно близки к тождественному отображению, то существует такое открытое подмножество в W_2, что для любого отображения $\mathfrak{G}$ из этого подмножества соответствующее косое произведение удовлетворяет также и свойствам 1) и 2). По теореме 5.2 это косое произведение имеет свойства (i)–(iii) из утверждения теоремы 5.2. Из этого следует, что отображение $\mathfrak{G}$ имеет свойства (i), (ii) из утверждения теоремы A. Добавление доказано.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю, профессору Ю. С. Ильяшенко, за постоянную поддержку и безграничное терпение. Я также благодарю Э. Вилкинсон, М. Шуба и Д. Долгопята за их интерес к моей работе, Д. В. Аносова за его замечания, которые привели к существенному улучшению текста, а также Корнельский университет, США, и лично Дж. Гукенхаймера за гостеприимство.

Список литературы

1. Alekseev V. M., Yakobson M., “Symbolic dynamics and hyperbolic dynamical systems”, *Phys. Rep.*, **75**:5 (1981), 287–325.

2. Аносов Д. В., “Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны”, *Тр. МИАН*, **90**, 1967.
3. Bonatti C., Diaz L. J., “Nonhyperbolic transitive diffeomorphisms”, *Ann. of Math.*, **143** (1996), 357–396.
4. Bonatti C., Viana M., *Israel J. Math*, **115** (2000), 157–193.
5. Bowen R., “Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **154** (1971), 377–397.
6. Brin M., “Hölder continuity of invariant distributions”, *in Smooth ergodic theory and its applications*, Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc., **69**, eds. A. Katok, R. de la Llave, Ya. Pesin, H. Weiss, 2001.
7. Брин М., Песин Я., “Частично гиперболические динамические системы”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **38**:1 (1974), 170–212.
8. Dawson S., Grebogi C., Sauer T., Yorke J., “Obstructions to Shadowing When a Lyapunov Exponent Fluctuates about Zero”, *Physical Review Letters*, **73**:14 (1994), 1927–1930.
9. Городецкий А. С., Ильяшенко Ю. С., “Некоторые новые грубые свойства инвариантных множеств и аттракторов динамических систем”, *Функцион. анализ и его прилож.*, **33**:2 (1999), 16–30.
10. Городецкий А. С., Ильяшенко Ю. С., “Некоторые свойства косых произведений над подковой и соленоидом”, *Тр. МИАН*, **231**, 2000, 96–118.
11. Городецкий А., Ильяшенко Ю., Клепцын В. А., Нальский М. Б., “Неустранимость нулевых показателей Ляпунова”, *Функцион. анализ и его прилож.*, **39**:1 (2005), 27–38.
12. Hasselblatt B., “Regularity of the Anosov splitting and of horospheric foliations”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **14**:4 (1994), 645–666.
13. Hirsh M., Pugh C., Shub M., “Invariant manifolds”, *Lecture Notes in Math.*, **583**, 1977.
14. Ilyashenko Yu., Li W., *Nonlocal bifurcations*, Mathematical Surveys and Monographs, **66**, Amer. Math. Soc., Providence, Long Island, 1998.
15. Katok A., Hasselblatt B., *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
16. Клепцын В., Нальский М., *Функцион. анализ и его прилож.*, 2006.
17. Kostelich E. J., Kan Ittai, Grebogi C., Ott E., Yorke J., “Unstable dimention variability: A source of nonhyperbolicity in chaotic systems”, *Physica D*, **109** (1997), 81–90.
18. Nitica V., Török A., “Cohomology of dynamical systems and rigidity of partially hyperbolic actions of higher-rank lattices”, *Duke Math. J.*, **79**:3 (1995), 751–810.
19. Nitica V., Török A., “An open dense set of stably ergodic diffeomorphisms in a neighborhood of a non-ergodic one”, *Topology*, **40**:2 (2001), 259–278.
20. Pesin Ya. B., “Lectures on partial hyperbolicity and stable ergodicity”, *Zürich Lectures in Advanced Mathematics*, European Mathematical Society, Zürich, 2004.
21. Pugh C., Shub M., Wilkinson A., “Hölder foliations”, *Duke Math. J.*, **86**:3 (1997), 517–546.
22. Ruelle D., Wilkinson A., “Absolutely singular dynamical foliations”, *Comm. Math. Phys.*, **219**:3 (2001), 481–487.
23. Schmeling J., Siegmund-Schultze Ra., “Hölder continuity of the holonomy maps for hyperbolic basic sets. I, Ergodic theory and related topics, III (Güstrow, 1990)”, *Lecture Notes in Math.*, **1514**, 1992, 174–191.
24. Shub M., *Global Stability of Dynamical Systems*, Springer-Verlag, New York, 1987.
25. Shub M., Wilkinson A., “Pathological foliations and removable zero exponents”, *Invent. Math.*, **139**:3 (2000), 495–508.

26. Yuan G. Ch., Yorke J., “An open set of maps for which every point is absolutly nonshadowable”, *Proc. Amer. Math.*, **128** (2000), 909–918.

А. Городецкий (A. Gorodetskii)
Pasadena, CA, 91125
E-mail: asgor@mccme.ru

Поступило в редакцию
11.07.2001 и 20.12.2005