

Hom-Leibniz 代数的广义导子

周 佳, 赵 昕, 张 宇

(吉林农业大学 信息技术学院, 长春 130118)

摘要: 给出 Hom-Leibniz 代数 L 的广义导子代数 $\text{GDer}(L)$ 、拟导子代数 $\text{QDer}(L)$ 、型心 $C(L)$ 、拟型心 $\text{QC}(L)$ 及中心导子代数 $\text{ZDer}(L)$ 的一些基本性质, 并证明 $\text{QDer}(L)$ 可以嵌入并成为更大的 Hom-Leibniz 代数的导子。

关键词: Hom-Leibniz 代数; 广义导子; 拟导子; 型心

中图分类号: O152.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 1671-5489(2017)02-0195-06

Generalized Derivations of Hom-Leibniz Algebras

ZHOU Jia, ZHAO Xin, ZHANG Yu

(School of Information and Technology, Jilin Agricultural University, Changchun 130118, China)

Abstract: We gave some basic properties of the generalized derivation algebra $\text{GDer}(L)$, quasiderivation algebra $\text{QDer}(L)$, centroid $C(L)$, quasicentroid $\text{QC}(L)$ and central derivation algebra $\text{ZDer}(L)$ of a Hom-Leibniz algebra L . We also proved that $\text{QDer}(L)$ could be embedded and become a larger derivation of Hom-Leibniz algebra.

Key words: Hom-Leibniz algebra; generalized derivation; quasiderivation; centroid

1 引言与预备知识

为了刻画 Witt 代数和 Virasoro 代数某些形变的结构, Hartwig 等^[1]提出了 Hom-李代数的概念. Hom-型代数与形变向量、各种类型的杨-Baxter 方程、Braid 群表示和量子群等密切相关^[2-3]. 文献[4]给出一种非对称代数的同调, 从而确定了 Leibniz 代数的概念. 与李代数相比, Leibniz 代数的定义中少了反对称的条件, 因此 Leibniz 代数是李代数的推广. 类似地, Hom-Leibniz 代数可视为 Hom-李代数的推广.

导子和广义导子代数在李(超)代数的研究中占主导地位^[5-6]. 本文将文献[7]的结果推广到 Hom-Leibniz 代数, 研究 Hom-Leibniz 代数 L 的导子代数 $\text{Der}(L)$ 、中心导子代数 $\text{ZDer}(L)$ 、拟导子代数 $\text{QDer}(L)$ 和广义导子代数 $\text{GDer}(L)$ 的性质.

定义 1^[8] 设 $(L, [,], \alpha)$ 是一个三元组, 其中: L 为数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间; 二元运算 $[\cdot, \cdot]: L \times L \rightarrow L$ 满足双线性性; $\alpha: L \rightarrow L$ 是线性映射. 若 $\forall x, y, z \in L$, 有

$$[\alpha(x), [y, z]] + [\alpha(y), [z, x]] + [\alpha(z), [x, y]] = 0,$$

则称 $(L, [,], \alpha)$ 是一个 Hom-Leibniz 代数.

定义 2^[8] 设 $(L, [,], \alpha)$ 是一个 Hom-Leibniz 代数. 若 $\forall x, y \in L$, 有 $\alpha([x, y]) = [\alpha x, \alpha y]$, 则称 L 为保积的 Hom-Leibniz 代数.

收稿日期: 2016-05-10.

作者简介: 周 佳(1982—), 女, 汉族, 硕士, 讲师, 从事李代数的研究, E-mail: 1316023705@qq.com.

基金项目: 吉林省教育厅“十二五”科学技术研究项目(批准号: 2015201)和吉林农业大学科研启动基金(批准号: 2015043).

性质 1 设 $(L, [\cdot, \cdot], \alpha)$ 是一个 Hom-Leibniz 代数. 定义向量空间 $\text{End}(L)$ 的子空间 $\bar{\mathcal{O}}$ 及 $\bar{\mathcal{O}}$ 上的线性变换 $\tilde{\alpha}$ 满足:

$$\bar{\mathcal{O}} = \{u \in \text{End}(L), u\alpha = \alpha u\}, \quad \tilde{\alpha}: \bar{\mathcal{O}} \rightarrow \bar{\mathcal{O}}, \quad \tilde{\alpha}(u) = \alpha u.$$

则 $\bar{\mathcal{O}}$ 关于运算

$$[u, u'] = uu' - u'u, \quad \forall u, u' \in \bar{\mathcal{O}}$$

构成一个 Hom-李代数.

证明: 由定义直接计算可得.

定义 3^[8] 设 $(L, [\cdot, \cdot], \alpha)$ 是一个保积的 Hom-Leibniz 代数. 若线性映射 $D: L \rightarrow L$ 满足

$$\begin{aligned} D\alpha &= \alpha D, \\ [D(x), \alpha^k(y)] + [\alpha^k(x), D(y)] &= D([x, y]), \quad \forall x, y \in L. \end{aligned}$$

则称其为 L 的 α^k -导子, 其中 $k \in \mathbb{N}$.

本文把 α^k -导子全体记作 $\text{Der}_{\alpha^k}(L)$, 令 $\text{Der}(L) := \bigoplus_{k \geq 0} \text{Der}_{\alpha^k}(L)$, 则 $\text{Der}(L)$ 关于上述括积运算及线性变换

$$\tilde{\alpha}: \text{Der}(L) \rightarrow \text{Der}(L); \quad \tilde{\alpha}(D) = D\alpha$$

是 $\bar{\mathcal{O}}$ 的 Hom-子代数, 称为 L 的导子代数.

定义 4 设 $(L, [\cdot, \cdot])$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 Hom-Leibniz 代数, $D \in \text{End}(L)$. 若存在 $D', D'' \in \text{End}(L)$, 使得

$$\begin{aligned} D\alpha &= \alpha D, \quad D'\alpha = \alpha D', \quad D''\alpha = \alpha D'', \\ [D(x), \alpha^k(y)] + [\alpha^k(x), D'(y)] &= D''([x, y]), \quad \forall x, y \in L, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

则称 D 是 L 的 α^k -广义导子. 将 α^k -广义导子全体构成的集合记为 $\text{GDer}_{\alpha^k}(L)$, 令

$$\text{GDer}(L) := \bigoplus_{k \geq 0} \text{GDer}_{\alpha^k}(L).$$

易知 $\text{GDer}(L)$ 是 $\bar{\mathcal{O}}$ 的 Hom-子代数, 称其为 L 的广义导子代数.

定义 5 设 $(L, [\cdot, \cdot])$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 Hom-Leibniz 代数, $D \in \text{End}(L)$. 若存在 $D' \in \text{End}(L)$, 使得

$$\begin{aligned} D\alpha &= \alpha D, \quad D'\alpha = \alpha D', \\ [D(x), \alpha^k(y)] + [\alpha^k(x), D(y)] &= D'([x, y]), \quad \forall x, y \in L, \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned} \tag{1}$$

则称 D 是 L 的 α^k -拟导子. 将 α^k -拟导子全体构成的集合记为 $\text{QDer}_{\alpha^k}(L)$, 令

$$\text{QDer}(L) := \bigoplus_{k \geq 0} \text{QDer}_{\alpha^k}(L).$$

易知 $\text{QDer}(L)$ 是 $\bar{\mathcal{O}}$ 的 Hom-子代数, 称其为 L 的拟导子代数.

定义 6 设 $(L, [\cdot, \cdot], \alpha)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 Hom-Leibniz 代数, $D \in \text{End}(L)$. 若 D 满足

$$\begin{aligned} D\alpha &= \alpha D, \\ [D(x), \alpha^k(y)] &= [\alpha^k(x), D(y)] = D([x, y]) = 0, \quad \forall x, y \in L, \quad k \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

则称 D 是 L 的 α^k -中心导子. 将 α^k -中心导子全体构成的集合记为 $\text{ZDer}_{\alpha^k}(L)$, 令

$$\text{ZDer}(L) := \bigoplus_{k \geq 0} \text{ZDer}_{\alpha^k}(L).$$

易知 $\text{ZDer}(L)$ 是 $\bar{\mathcal{O}}$ 的 Hom-理想, 称其为 L 的中心导子代数.

定义 7 设 $(L, [\cdot, \cdot])$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 Hom-Leibniz 代数. 令集合

$$\begin{aligned} C_{\alpha^k}(L) &= \{D \in \text{End}(L) \mid D\alpha = \alpha D, [D(x), \alpha^k(y)] = [\alpha^k(x), D(y)] = \\ &\quad D([x, y]), \forall x, y \in L, k \in \mathbb{N}\}, \end{aligned}$$

且 $C(L) := \bigoplus_{k \geq 0} C_{\alpha^k}(L)$, 则称 $C(L)$ 为 L 的型心.

定义 8 设 $(L, [\cdot, \cdot])$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 Hom-Leibniz 代数. 令

$$\text{QC}_{\alpha^k}(L) = \{D \in \text{End}(L) \mid D\alpha = \alpha D, [D(x), \alpha^k(y)] = [\alpha^k(x), D(y)], \forall x, y \in L, k \in \mathbb{N}\},$$

且 $\text{QC}(L) := \bigoplus_{k \geq 0} \text{QC}_{\alpha^k}(L)$, 则称 $\text{QC}(L)$ 为 L 的拟型心.

根据上述定义, 易证 $\text{ZDer}(L) \subseteq \text{Der}(L) \subseteq \text{QDer}(L) \subseteq \text{GDer}(L) \subseteq \text{End}(L)$.

定义 9^[8] 设 $(L, [\cdot, \cdot], \alpha)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上保积的 Hom-Leibniz 代数. 若

$$Z(L) = \{x \in L \mid [x, y] = [y, x] = 0, \forall y \in L\},$$

则 $Z(L)$ 称为 L 的中心.

2 主要结果

2.1 广义导子代数及其子代数

命题 1 设 $(L, [,], \alpha)$ 是一个保积的 Hom-Leibniz 代数, 则:

- 1) $\text{GDer}(L)$, $\text{QDer}(L)$ 和 $\text{C}(L)$ 是 $\mathcal{O}$ 的 Hom-子代数;
- 2) $\text{ZDer}(L)$ 是 $\text{Der}(L)$ 的 Hom-理想.

证明: 1) 设 $D_1 \in \text{GDer}_{\alpha^k}(L)$, $D_2 \in \text{GDer}_{\alpha^s}(L)$. 则 $\forall x, y \in L$, 有

$$\begin{aligned} [(\tilde{\alpha}(D_1))(x), \alpha^{k+1}(y)] &= [(D_1\alpha)(x), \alpha^{k+1}(y)] = \alpha[D_1(x), \alpha^k(y)] = \\ &= \alpha(D_1''([x, y]) - [\alpha^k(x), D_1'(y)]) = \tilde{\alpha}(D_1'')([x, y]) - [\alpha^{k+1}(x), \tilde{\alpha}(D_1')(y)]. \end{aligned}$$

由于 $\tilde{\alpha}(D_1'')$, $\tilde{\alpha}(D_1') \in \text{End}(L)$, 因此 $\tilde{\alpha}(D_1) \in \text{GDer}_{\alpha^{k+1}}(L)$. 另一方面, 有

$$\begin{aligned} [D_1 D_2(x), \alpha^{k+s}(y)] &= D_1' D_2''([x, y]) + [\alpha^{s+k}(x), D_2' D_1'(y)] - \\ &= D_2''([\alpha^k(x), D_1'(y)]) - D_1'([\alpha^s(x), D_2'(y)]), \\ [D_2 D_1(x), \alpha^{k+s}(y)] &= D_2' D_1''([x, y]) + [\alpha^{s+k}(x), D_1' D_2'(y)] - \\ &= D_1''([\alpha^s(x), D_2'(y)]) - D_2''([\alpha^k(x), D_1'(y)]), \end{aligned}$$

因此 $\forall x, y \in L$, 有

$$[[D_1, D_2](x), \alpha^{k+s}(y)] = [D_1'', D_2'']([x, y]) - [\alpha^{k+s}(x), [D_1', D_2'](y)].$$

由于 $[D_1', D_2'] \in \text{End}(L)$, $[D_1'', D_2''] \in \text{End}(L)$, 因此 $[D_1, D_2] \in \text{GDer}_{\alpha^{k+s}}(L)$. 从而 $\text{GDer}(L)$ 是 $\mathcal{O}$ 的 Hom-子代数. 同理, $\text{QGer}(L)$ 是 $\mathcal{O}$ 的 Hom-子代数.

设 $D_1 \in \text{C}_{\alpha^k}(L)$, $D_2 \in \text{C}_{\alpha^s}(L)$. 则 $\forall x, y \in L$, 有

$$[\tilde{\alpha}(D_1)(x), \alpha^{k+1}(y)] = \alpha([D_1(x), \alpha^k(y)]) = \alpha([\alpha^k(x), D_1(y)]) = [\alpha^{k+1}(x), \tilde{\alpha}(D_1)(y)],$$

即 $\tilde{\alpha}(D_1) \in \text{C}_{\alpha^{k+1}}(L)$. 另一方面, 有

$$\begin{aligned} [[D_1, D_2](x), \alpha^{k+s}(y)] &= [D_1 D_2(x), \alpha^{k+s}(y)] - [D_2 D_1(x), \alpha^{k+s}(y)] = \\ &= D_1([D_2(x), \alpha^s(y)]) - D_2([D_1(x), \alpha^k(y)]) = \\ &= D_1 D_2([x, y]) - D_2 D_1([x, y]) = [D_1, D_2]([x, y]). \end{aligned}$$

同理

$$[\alpha^{k+s}(x), [D_1, D_2](y)] = [D_1, D_2]([x, y]),$$

因此 $[D_1, D_2] \in \text{C}_{\alpha^{k+s}}(L)$. 从而 $\text{C}(L)$ 是 $\mathcal{O}$ 的 Hom-子代数.

2) 设 $D_1 \in \text{ZDer}_{\alpha^k}(L)$, $D_2 \in \text{Der}_{\alpha^s}(L)$. 则 $\forall x, y \in L$, 有

$$[\tilde{\alpha}(D_1)(x), \alpha^{k+1}(y)] = \alpha([D_1(x), \alpha^k(y)]) = \alpha D_1([x, y]) = \tilde{\alpha}(D_1)([x, y]) = 0.$$

因此 $\tilde{\alpha}(D_1) \in \text{ZDer}_{\alpha^{k+1}}(L)$. 由于

$$[[D_1, D_2]([x, y])] = D_1 D_2([x, y]) - D_2 D_1([x, y]) = D_1([D_2(x), \alpha^s(y)] + [\alpha^s(x), D_2(x)]) = 0,$$

又

$$\begin{aligned} [[D_1, D_2](x), \alpha^{s+k}(y)] &= [(D_1 D_2 - D_2 D_1)(x), \alpha^{s+k}(y)] = \\ &= (D_2([D_1(x), \alpha^k(y)] - [\alpha^s(D_1(x)), D_2(\alpha^k(y))]) = \\ &= -[D_1(\alpha^s(x)), \alpha^k(D_2(y))] = 0, \end{aligned}$$

因此 $[D_1, D_2] \in \text{ZDer}_{\alpha^{k+s}}(L)$. 从而 $\text{ZDer}(L)$ 是 $\text{Der}(L)$ 的 Hom-理想.

命题 2 设 $(L, [,], \alpha)$ 是一个保积的 Hom-Leibniz 代数, 则:

- 1) $[\text{Der}(L), \text{C}(L)] \subseteq \text{C}(L)$;
- 2) $[\text{QDer}(L), \text{QC}(L)] \subseteq \text{QC}(L)$;
- 3) $[\text{QC}(L), \text{QC}(L)] \subseteq \text{QDer}(L)$;
- 4) $\text{C}(L) \subseteq \text{QDer}(L)$.

证明: 1) 设 $D_1 \in \text{GDer}_a^k(L)$, $D_2 \in \text{C}_a^s(L)$, $\forall x, y \in L$, 则

$$\begin{aligned} [D_1 D_2(x), \alpha^{k+s}(y)] &= D_1([D_2(x), \alpha^s(y)]) - [\alpha^k(D_2(x)), D_1(\alpha^s(y))] = \\ &= D_1([D_2(x), \alpha^s(y)]) - [D_2(\alpha^k(x)), \alpha^s(D_1(y))] = \\ &= D_1 D_2([x, y]) - [\alpha^{k+s}(x), D_2 D_1(y)], \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} [D_2 D_1(x), \alpha^{k+s}(y)] &= D_2([D_1(x), \alpha^k(y)]) = D_2 D_1([x, y]) - D_2([\alpha^k(x), D_1(y)]) = \\ &= D_2 D_1([x, y]) - [\alpha^{k+s}(x), D_2 D_1(y)]. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} [[D_1, D_2](x), \alpha^{k+s}(y)] &= [D_1 D_2(x), \alpha^{k+s}(y)] - [D_2 D_1(x), \alpha^{k+s}(y)] = \\ &= D_1 D_2([x, y]) - D_2 D_1([x, y]) = [D_1, D_2]([x, y]). \end{aligned}$$

另一方面, 有

$$\begin{aligned} [D_1 D_2(x), \alpha^{k+s}(y)] &= D_1([D_2(x), \alpha^s(y)]) - [\alpha^k(D_2(x)), D_1(\alpha^s(y))] = \\ &= D_1([\alpha^s(x), D_2(y)]) - [\alpha^{k+s}(x), D_2 D_1(y)] = \\ &= [D_1(\alpha^s(x)), \alpha^k(D_2(y))] + [\alpha^{k+s}(x), D_1 D_2(y)] - [\alpha^{k+s}(x), D_2 D_1(y)]. \end{aligned}$$

同理 $[D_2 D_1(x), \alpha^{k+s}(y)] = [D_1(\alpha^s(x)), \alpha^k(D_2(y))]$, 则

$$\begin{aligned} [[D_1, D_2](x), \alpha^{k+s}(y)] &= [D_1 D_2(x), \alpha^{k+s}(y)] - [D_2 D_1(x), \alpha^{k+s}(y)] = \\ &= [\alpha^{k+s}(x), D_1 D_2(y)] - [\alpha^{k+s}(x), D_2 D_1(y)] = [\alpha^{k+s}(x), [D_1, D_2](y)]. \end{aligned}$$

从而 $[D_1, D_2] \in \text{C}_{a^{s+k}}(L)$. 因此 $[\text{Der}(L), \text{C}(L)] \subseteq \text{C}(L)$.

2) 同 1) 的证明.

3) 设 $D_1 \in \text{QC}_a^k(L)$, $D_2 \in \text{QC}_a^s(L)$, $\forall x, y \in L$, 则

$$\begin{aligned} [[D_1, D_2](x), \alpha^{k+s}(y)] &= [D_1 D_2(x), \alpha^{k+s}(y)] - [D_2 D_1(x), \alpha^{k+s}(y)] = \\ &= [\alpha^{k+s}(x), D_2 D_1(y)] - [\alpha^{k+s}(x), D_1 D_2(y)] = -[\alpha^{k+s}(x), [D_1, D_2](y)], \end{aligned}$$

即

$$[[D_1, D_2](x), \alpha^{k+s}(y)] + [\alpha^{k+s}(x), [D_1, D_2](y)] = 0.$$

令式(1)中 $D' = 0$, 易知 $[D_1, D_2] \in \text{QDer}_a^{k+s}(L)$.

4) 与 1)~3) 的证明类似.

定理 1 设 $(L, [,], \alpha)$ 是一个保积的 Hom-Leibniz 代数, 其中 α 是满射, $Z(L)$ 是 L 的中心, 则 $[\text{C}(L), \text{QC}(L)] \subseteq \text{End}(L, Z(L))$. 特别地, 若 $Z(L) = \{0\}$, 则 $[\text{C}(L), \text{QC}(L)] = \{0\}$.

证明: 设 $D_1 \in \text{C}_a^k(L)$, $D_2 \in \text{QC}_a^s(L)$, $x \in L$. 因为 α 是满射, 所以 $\forall y' \in L$, $\exists y \in L$, 使得 $y' = \alpha^{k+s}(y)$. 则

$$\begin{aligned} [[D_1, D_2](x), y'] &= [[D_1, D_2](x), \alpha^{k+s}(y)] = [D_1 D_2(x), \alpha^{k+s}(y)] - [D_2 D_1(x), \alpha^{k+s}(y)] = \\ &= D_1([D_2(x), \alpha^s(y)]) - [\alpha^s D_1(x), D_2 \alpha^k(y)] = \\ &= D_1([D_2(x), \alpha^s(y)]) - D_1([\alpha^s(x), D_2(y)]) = \\ &= D_1([D_2(x), \alpha^s(y)] - [\alpha^s(x), D_2(y)]) = 0. \end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned} [y', [D_1, D_2](x)] &= [\alpha^{k+s}(y), D_1 D_2(x)] - [\alpha^{k+s}(y), D_2 D_1(x)] = \\ &= D_1([\alpha^s(y), D_2(x)]) - [D_2 \alpha^k(y), \alpha^s D_1(x)] = \\ &= D_1([\alpha^s(y), D_2(x)]) - D_1([D_2(y), \alpha^s(x)]) = \\ &= D_1([D_2(y), \alpha^s(x)] - [D_2(y), \alpha^s(x)]) = 0, \end{aligned}$$

从而 $[D_1, D_2](x) \in Z(L)$, 即 $[D_1, D_2] \in \text{End}(L, Z(L))$. 特别地, 若 $Z(L) = \{0\}$, 易知

$$[\text{C}(L), \text{QC}(L)] = 0.$$

定理 2 设 $(L, [,], \alpha)$ 是一个保积的 Hom-Leibniz 代数, α 是满射. 若 $Z(L) = \{0\}$, 则 $\text{QC}(L)$ 是一个 Hom-李代数当且仅当 $[\text{QC}(L), \text{QC}(L)] = 0$.

证明: 必要性. 设 $D_1 \in \text{QC}_a^k(L)$, $D_2 \in \text{QC}_a^s(L)$, $x \in L$. 因为 α 是满射, 则 $\forall y' \in L$, $\exists y \in L$, 使得 $y' = \alpha^{k+s}(y)$. 因为 $\text{QC}(L)$ 是 Hom-李代数, 则 $[D_1, D_2] \in \text{QC}_a^{k+s}(L)$, 即

$$[[D_1, D_2](x), y'] = [[D_1, D_2](x), \alpha^{k+s}(y)] = [\alpha^{k+s}(x), [D_1, D_2](y)].$$

由命题 2 中的证明易知,

$$[[D_1, D_2](x), y'] = [[D_1, D_2](x), \alpha^{k+s}(y)] = -[\alpha^{k+s}(x), [D_1, D_2](y)].$$

从而 $[[D_1, D_2](x), y'] = 0$. 同理 $[y', [D_1, D_2](y)] = 0$. 故 $[D_1, D_2] = 0$.

充分性显然.

2.2 Hom-Leibniz 代数的拟导子

命题 3 设 $(L, [,], \alpha)$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的一个 Hom-Leibniz 代数, t 是一个未定元. 定义

$$\tilde{L} := L[tF[t]/t^3] = \left\{ \sum (x \otimes t + y \otimes t^2) : x, y \in L \right\},$$

$$\tilde{\alpha}(\tilde{L}) := \left\{ \sum (\alpha(x) \otimes t + \alpha(y) \otimes t^2) : x, y \in L \right\},$$

则 $\tilde{L}$ 关于括积运算 $[x \otimes t^i, y \otimes t^j] = [x, y] \otimes t^{i+j}$ ($\forall x, y \in L, i, j \in \{1, 2\}$) 是一个 Hom-Leibniz 代数.

证明: 对 $\forall x_1, x_2, x_3 \in L, i, j, k \in \{1, 2\}$, 有

$$\begin{aligned} [\tilde{\alpha}(x_1 \otimes t^i), [x_2 \otimes t^j, x_3 \otimes t^k]] &= [\alpha(x_1), [x_2, x_3]] \otimes t^{i+j+k} = \\ &= ([\alpha(x_1), \alpha(x_2)] + [\alpha(x_1), \alpha(x_3)]) \otimes t^{i+j+k} = \\ &= [[x_1, x_2], \alpha(x_3)] \otimes t^{i+j+k} + [\alpha(x_2), [x_1, x_3]] \otimes t^{i+j+k} = \\ &= [[x_1 \otimes t^i, x_2 \otimes t^j], \tilde{\alpha}(x_3 \otimes t^k)] + \\ &= [\tilde{\alpha}(x_2 \otimes t^j), [x_1 \otimes t^i, x_3 \otimes t^k]]. \end{aligned}$$

因此 $\tilde{L}$ 是一个 Hom-Leibniz 代数. 证毕.

为方便, 记 $xt(xt^2) = x \otimes t(x \otimes t^2)$. 设 U 是 L 的子空间, 使得 $L = U \oplus [L, L]$, 则

$$\tilde{L} = Lt + Lt^2 = Lt + [L, L]t^2 + Ut^2.$$

定义映射 $\varphi: \text{QDer}(L) \rightarrow \text{End}(\tilde{L})$, 使得对任意的 $D \in \text{QDer}_a^k(L)$, 有

$$\varphi(D)(at + bt^2 + ut^2) = D(a)t + D'(b)t^2,$$

其中 D' 和 D 满足式(1), $\forall a \in L, b \in [L, L], u \in U$.

命题 4 1) φ 是单射且 $\varphi(D)$ 与 D' 的选取无关; 2) $\varphi(\text{QDer}(L)) \subseteq \text{Der}(\tilde{L})$.

证明: 1) 若 $\varphi(D_1) = \varphi(D_2)$, 则对任意的 $a \in L, b \in [L, L]$ 和 $u \in U$, 有

$$\varphi(D_1)(at + bt^2 + ut^2) = \varphi(D_2)(at + bt^2 + ut^2),$$

使得 $D_1(a)t + D'_1(b)t^2 = D_2(a)t + D'_2(b)t^2$. 从而 $D_1(a) = D_2(a)$. 因此 $D_1 = D_2$, 即 φ 是单射.

假设存在 D'' 使得

$$\varphi(D)(at + bt^2 + ut^2) = D(a)t + D''(b)t^2,$$

且

$$[D(x), \alpha^k(y)] + [\alpha^k(x), D(y)] = D''([x, y]),$$

则 $D'([x, y]) = D''([x, y])$. 因此 $D'(b) = D''(b)$. 即

$$\varphi(D)(at + bt^2 + ut^2) = D(a)t + D'(b)t^2 = D(a)t + D''(b)t^2.$$

故 $\varphi(D)$ 由 D 决定.

2) 对 $\forall i+j \geq 3$, 有 $[xt^i, yt^j] = [x, y]t^{i+j} = 0$. 故为证 $\varphi(D) \in \text{Der}(\tilde{L})$, 只需证

$$\varphi(D)([xt, yt]) = [\varphi(D)(xt), \tilde{\alpha}^k(yt)] + [\tilde{\alpha}^k(xt), \varphi(D)(yt)].$$

对任意的 $x, y \in L$, 有

$$\begin{aligned} \varphi(D)([xt, yt]) &= \varphi(D)([x, y]t^2) = D'([x, y])t^2 = ([D(x), \alpha^k(y)] + [\alpha^k(x), D(y)])t^2 = \\ &= [D(x)t, \alpha^k(y)t] + [\alpha^k(x)t, D(y)t] = [\varphi(D)(xt), \tilde{\alpha}^k(yt)] + [\tilde{\alpha}^k(xt), \varphi(D)(yt)]. \end{aligned}$$

因此, 对任意的 $D \in \text{QDer}(L)$, 有 $\varphi(D) \in \text{Der}(\tilde{L})$.

定理 3 设 $(L, [,], \alpha)$ 是保积的 Hom-Leibniz 代数, α 是满射. $Z(L) = \{0\}$, $\tilde{L}, \varphi$ 定义如前. 则 $\text{Der}(\tilde{L}) = \varphi(\text{QDer}(L)) \oplus Z\text{Der}(\tilde{L})$.

证明: 由已知 $Z(L) = \{0\}$, 得 $Z(\tilde{L}) = Lt^2$. 对 $\forall g \in \text{Der}(\tilde{L})$, 有 $g(Z(\tilde{L})) \subseteq Z(\tilde{L})$, 因此 $g(Ut^2) \subseteq g(Z(\tilde{L})) \subseteq Z(\tilde{L}) = Lt^2$. 定义映射 $f: Lt + [L, L]t^2 + Ut^2 \rightarrow Lt^2$, 使得

$$f(x) = \begin{cases} g(x) \cap Lt^2, & x \in Lt, \\ g(x), & x \in Ut^2, \\ 0, & x \in [L, L]t^2, \end{cases}$$

易知 f 是线性的. 注意到

$$f([\tilde{L}, \tilde{L}]) = f([L, L]t^2) = 0, \quad [f(\tilde{L}), \tilde{\alpha}^k L] \subseteq [Lt^2, \alpha^k(L)t + \alpha^k(L)t^2] = 0,$$

因此 $f \in \text{ZDer}(\tilde{L})$. 又由于

$$(g - f)(Lt) = g(Lt) - g(Lt) \cap Lt^2 = g(Lt) - Lt^2 \subseteq Lt, \quad (g - f)(Ut^2) = 0,$$

且

$$(g - f)([L, L]t^2) = g([L, L]t^2) \subseteq [\tilde{L}, \tilde{L}] = [L, L]t^2,$$

因此存在 $D, D' \in \text{End}(L)$, 使得 $\forall a \in L, b \in [L, L]$, 有

$$(g - f)(at) = D(a)t, \quad (g - f)(bt^2) = D'(b)t^2,$$

其中 $D \in \text{QDer}(L)$. 事实上, $\forall a_1, a_2 \in L$, 因为 $(g - f) \in \text{Der}(\tilde{L})$ 且由 $\text{Der}(\tilde{L})$ 的定义, 有

$$[(g - f)(a_1t), \tilde{\alpha}^k(a_2t)] + [\tilde{\alpha}^k(a_1t), (g - f)(a_2t)] = (g - f)([a_1t, a_2t]),$$

即

$$[D(a_1), \tilde{\alpha}^k(a_2)] + [\tilde{\alpha}^k(a_1), D(a_2)] = D'([a_1, a_2]),$$

故 $D \in \text{QDer}(L)$. 因此

$$g - f = \varphi(D) \in \varphi(\text{QDer}(L)) \Rightarrow \text{Der}(\tilde{L}) \subseteq \varphi(\text{QDer}(L)) + \text{ZDer}(\tilde{L}).$$

由命题 4 中 2) 知, $\text{Der}(\tilde{L}) = \varphi(\text{QDer}(L)) + \text{ZDer}(\tilde{L})$. $\forall f \in \varphi(\text{QDer}(L)) \cap \text{ZDer}(\tilde{L})$, 存在 $D \in \text{QDer}(L)$, 使得 $f = \varphi(D)$. 则 $\forall a \in L, b \in [L, L]$, 有

$$f(at + bt^2 + ut^2) = \varphi(D)(at + bt^2 + ut^2) = D(a)t + D'(b)t^2.$$

另一方面, 由于 $f \in \text{ZDer}(\tilde{L})$, 所以 $f(at + bt^2 + ut^2) \in Z(\tilde{L}) = Lt^2$. 即 $D(a) = 0, \forall a \in L$. 因此 $D = 0$. 从而 $f = 0$. 故 $\text{Der}(\tilde{L}) = \varphi(\text{QDer}(L)) \oplus \text{ZDer}(\tilde{L})$.

参 考 文 献

- [1] Hartwig J T, Larsson D, Silvestrov S D. Deformations of Lie Algebras Using σ -Derivations [J]. J Algebra, 2006, 295(2): 314-361.
- [2] Yau D. The Hom-Yang-Baxter Equation, Hom-Lie Algebras, and Quasi-triangular Bialgebras [J]. J Math Phys, 2009, 42(16): 1076-1082.
- [3] Yau D. Hom-Quantum Groups I: Quasi-triangular Hom-Bialgebras [J]. J Phys A, 2009, 45(6): 1-5.
- [4] Loday J L, Pirashvili T. Universal Enveloping Algebras of Leibniz Algebras and (co)Homology [J]. Math Ann, 1993, 296(1): 139-158.
- [5] CHEN Liangyun, MA Yao, NI Lin. Generalized Derivations of Lie Color Lgebras [J]. Results in Mathematics, 2013, 63(3): 923-936.
- [6] Leger G F, Luks E M. Generalized Derivations of Lie Algebras [J]. J Algebra, 2000, 228(1): 165-203.
- [7] 周佳, 牛艳君, 陈良云. Hom-李代数的广义导子 [J]. 数学学报(中文版), 2015, 58(4): 551-558. (ZHOU Jia, NIU Yanjun, CHEN Liangyun. Generalized Derivations of Hom-Lie Algebras [J]. Acta Mathematica Sinica (Chinese Series), 2015, 58(4): 551-558.)
- [8] CHENG Yongsheng, SU Yucai. (co)Homology and Universal Central Extension of Hom-Leibniz Algebras [J]. Acta Mathematica Sinica (English Series), 2011, 27(5): 813-830.

(责任编辑: 李 琦)