14. *Einige Sätze über Matrizen.*

Von Kenjiro SHODA

(Eingegangen am 21, April, 1936).

Es sei K ein kommutativer Körper. Wir betrachten die Matrizen mit den Elementen aus K. Sind A, B reguläre Matrizen, d. h. sind die Determinanten von A B von Null verschieden, so heisst die Matrix $ABA^{-1}B^{-1}$ den multiplikativen Kommutator oder kurz m-Kommutator von A und B. Die Determinante jedes m-Kommutators ist gleich 1. Umgekehrt wird bekanntlich jede Matrix von der Determinante 1 als das Produkt von m-Kommutatoren dargestellt. Anders gesagt, stimmt die Gruppe aller Matrizen von der Determinante 1 mit der Kommutatorgruppe der Gruppe aller regulären Matrizen überein[1]. Diesen Umkehrungssatz kann man folgendermassen verschärfen, wenn K algebraisch-abgeschlossen oder reell-abgeschlossen ist.

Satz 1. *In einem algebraisch-abgeschlossenen Körper K lässt sich jede Matrix von der Determinante* 1 *als das m-Kommutator zweier Matrizen darstellen.*

Satz 2. *In einem reell-abgeschlossenen Körper K lässt sich jede Matrix von der Determinante* 1 *als das Produkt zweier m-Kommutatoren darstellen*[2].

Unter den additiven Kommutator oder kurz a-Kommutator von A und B verstehen wir die Matrix $AB-BA$, deren Spur bekanntlich gleich Null ist. Man kann auch ohne Mühe den Umkehrungssatz beweisen. Es gilt nämlich

Satz 3. *In einem beliebigen Körper K von der Charakteristik Null lässt sich jede Matrix von der Spur Null als das a-Kommutator zweier Matrizen darstellen.*

In der vorliegenden Note werden wir die elementaren Beweis dieser Sätze angeben.

0. Normalformen einer Matrix. Bei der ähnlichen Transformation bleibt die Gültigkeit der oben erwähnten Sätze erhalten. Daher werden wir

---

(1) Den einzigen Ausnahmenfall bilden die Matrizen des Grades 2 im Körper mit 2 Elementen. Zum Beweis hat man etwa die erzeugenden Matrizen zu betrachten und zu zeigen, dass solche Matrizen in der Tat m-Kommutator sind. Vgl. hierzu etwa B. L. van der Waerden, Gruppen von linearen Transformationen, Ergebnisse der Math. (1935) 6.

(2) K. Schröder, Einige Sätze aus der Theorie der kontinuierichen Gruppen linearer Transformationen, Dissertation Berlin (1934).

zunächst einige bekannte Normalformen einer Matrix angeben, die nachher gebraucht werden.

I. Eine Matrix A mit den Elementen aus K ist bekanntlich einer Matrix von der Gestalt

$$A \sim \begin{pmatrix} A_1 & & & O \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_m \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots\dots & a_n \end{pmatrix}$$

ähnlich, wo die charakteristische Determinante $|xE_i - A_i|$ Potenz eines irreduziblen Polynoms ist[3]. Dabei bedeutet E_i wie üblich die Einheitsmatrix.

II. Man erhält auch eine Normalform, wenn man verlangt, dass $|xE_i - A_i|$ durch $|xE_{i+1} - A_{i+1}|$ teilbar ist.

III. Enthält K die sämtlichen Eigenwerte von A, so lässt sich A in der Form

$$A \sim \begin{pmatrix} \alpha_1 & a_{12} \dots & a_{1n} \\ 0 & \alpha_2 \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

darstellen.

IV. Diese Normalform wird so verbessert, falls die Determinante von Null verschieden ist[4],

$$A \sim \begin{pmatrix} \alpha_1 F_1 & & & O \\ & \alpha_2 F_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \alpha_m F_m \end{pmatrix}, \quad F_i = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots & 1 \end{pmatrix}$$

V. Ist K reell-abgeschlossen und ist $|xE_i - A_i|$ in I Potenz eines irreduziblen quadratischen Polynoms $\varphi_i(x)$, so ist

---

(3) Es handelt sich um die Elementarteiler-Normalform.

(4) Dies ist die klassische Normalform. In der Literatur ist die Matrix von der Form

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \dots & 0 \\ 0 & \alpha \dots\dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 1 \\ 0 & 0 \dots\dots & \alpha \end{pmatrix}$$

üblich. Ist die Determinante von Null verschieden, so erweist sich aber die hier angegebene manchmal als bequemer.

$$A_i \sim \begin{pmatrix} \alpha F & \\ 0 & \bar{\alpha} F \end{pmatrix}$$

im algebraisch-abgeschlossenen Erweiterungskörper, wo $\bar{\alpha}$ das zu α konjugiertimaginäre Element bedeutet. Daher ist A_i zum Kroneckerschen Produkt

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \times F, \quad \text{also zu} \quad \begin{pmatrix} \alpha + \bar{\alpha} & -\alpha\bar{\alpha} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times F$$

ähnlich, da

$$\begin{vmatrix} x-\alpha & 0 \\ 0 & x-\bar{\alpha} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+\bar{\alpha} & -\alpha\bar{\alpha} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \varphi_i(x).$$

1. Beweis des Satzes 1. Wir beweisen Satz 1 in der folgenden verschärften Form:

Satz 1'. *Es sei K ein Körper mit unendlich vielen Elementen. Sind die sämtlichen Eigenwerte einer Matrix A in K enthalten und ist die Determinante von A gleich 1, so gibt es zwei Matrizen C, D, so dass $A = CDC^{-1}D^{-1}$ wird. Dabei kann man D so annehmen, dass die Eigenwerte von D lauter verschieden sind.*

Wir nehmen an, dass A schon die Normalform III hat. Nach der Voraussetzung ist dann $\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$. Daher kann man diese n Elemente a_i in Klassen so einteilen, dass das Produkt der Elemente einer Klasse gleich 1 wird. Es sei $\{a_{j_1}, \ldots, a_{j_{k_j}}\}$, $j = 1, 2, \ldots, r$, eine solche möglichst verfeinerte Klasseneinteilung, d. h. das Produkt der Elemente jedes Teilsystems einer Klasse sei von 1 verschieden. Wir nehmen zunächst ein beliebiges Element d_{j_1} an und wir bestimmen $d_{j_2}, \ldots, d_{j_{k_j}}$ durch $a_{j_\alpha} d_{j_\alpha} = d_{j_{\alpha+1}}$. Dann ist $a_{j_k} d_{j_k} = d_{j_1}$, da $\prod_{i=j_1}^{j_{k_j}} a_i = 1$ ist. Ferner sind die k_j Elemente d_{j_α} lauter verschieden, da unsere Klasseneinteilung möglichst verfeinert ist. Nun nehmen wir die r Element d_{j_1} so an, dass unsere n Elemente d_i verschieden sind. Dies ist stets möglich, da der Körper K unendlich viele Elemente enthält.

Bezeichnet man die Diagonalmatrix mit den Elementen d_i mit D, so haben AD und D dieselben Eigenwerte, die lauter verschieden sind. Daher sind AD und D ähnlich und folglich gibt es eine Matrix C mit $AD = CDC^{-1}$, also $A = CDC^{-1}D^{-1}$.

2. Beweis des Satzes 2. Wir betrachten zunächst die Normalform I im reell-abgeschlossenen Körper K. Die Determinante $|xE_i - A_i|$ ist Potenz eines irreduziblen Polynoms $\varphi_i(x)$. Da K reell-abgeschlossen ist, so ist $\varphi_i(x)$ linear oder quadratisch. Jedenfalls gibt es ein Element α_i aus K derart, dass $A_i = \alpha_i A_i^*$, $|A_i^*| = 1$ ist. Ist nämlich $\varphi_i(x)$ linear, so hat man nur die Normalform IV zu betrachten. Ist $\varphi_i(x)$ quadratisch, so sind die

Wurzeln ρ, $\bar{\rho}$ konjugiertimaginär. Da $|A_i|=(\rho\bar{\rho})^{\frac{n_i}{2}}$ ist, so hat man nur $\alpha_i=\sqrt{\rho\bar{\rho}}$ zu setzen, wobei n_i den Grad von A_i bedeutet. Nun erhält man

$$A\sim GA^*=\begin{pmatrix}\alpha_1E_1 & & & O\\ & \alpha_2E_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \alpha_mE_m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_1^* & & & O\\ & A_2^* & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_m^*\end{pmatrix},$$

wo $|A_i^*|=1$ für jedes i ist. Da $|A^*|=1$ ist, so ist auch $|G|=1$. Nach Satz 1' lässt sich G als m-Kommutator darstellen. Zum Beweis des Satzes genügt es also zu zeigen, dass A_i^* für jedes i als m-Kommutator dargestellt wird. Ist $\varphi_i(x)$ linear, so ist dies wieder nach Satz 1' klar. Ist $\varphi_i(x)$ quadratisch, so betrachten wir die Normalform V. Da jetzt $\alpha\bar{\alpha}=1$ ist, so ist, wenn man $\alpha+\bar{\alpha}=a$ setzt,

$$A_i^*\sim\begin{pmatrix}a & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\times F.$$

Es ist aber

$$\begin{pmatrix}a & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1}$$

und F lässt sich nach Satz 1' als m-Kommutator darstellen. Daraus folgt unmittelbar, dass A_i^* für jedes i als m-kommutator dargestellt wird.

3. Beweis des Satzes 3. Zunächst beweisen wir

Hilfssatz. *Ist die Spur einer Matrix A gleich Null, so ist A einer Matrix ähnlich, deren Diagonalelemente sämtlich Null sind.*

Wir nehmen an, dass A die Gestalt

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$$

hat, wo die Diagonalelemente von A_{11} alles von Null verschieden und die von A_{22} alles gleich Null sind. Zum Beweis des Hilfssatzes genügt es zu zeigen, dass man stets die Anzahl der Nullen im Diagonalen von A vermehren kann. Wir bestimmen nun eine Matrix P_1, die A_{11} in die Normalform II transformiert. Dann wird die Anzahl der Nullen im Diagonalen von A vermehrt, wenn man A durch $\begin{pmatrix}P_1 & O\\ O & E_2\end{pmatrix}$ transformiert. Denn sonst wäre die Normalform II für A_{11} Diagonalmatrix und zwar von der Gestalt αE. Da aber die Spur von A und folglich die von A_{11} gleich Null ist, so müsste gegen der Voraussetzung $A_{11}=O$ sein.

Man beweist nun leicht Satz 3. Wir nehmen nach dem Hilfssatz an, dass die Diagonalelemente a_{ii} von $A=(a_{ij})$ gleich Null sind. Man bilde eine

Diagonalmatrix B mit lauter verschiedenen Elementen b_i. Bestimmt man die Matrix $C=(c_{ij})$ durch $(b_i-b_j)c_{ij}=a_{ij}$, so ist ersichtlich $A=BC-CB$. Dass diese linearen Gleichungen Lösung haben, folgt daraus, dass $a_{ii}=0$ und $b_i-b_j\neq 0$ für $i\neq j$ ist.

Mathematisches Institut
Kaiserliche Universität zu Osaka.