

Revêtements à ramification impaire et thêta-caractéristiques

Jean-Pierre SERRE

Résumé — Soit $\pi : Y \rightarrow X$ un revêtement ramifié de courbes algébriques projectives lisses sur \mathbf{C} tel que tous les indices de ramification de π soient impairs. On associe à π un certain nombre d'invariants, à valeurs dans $H^i(X, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$, $i=1, 2$, dont on étudie les relations. Si c est une thêta-caractéristique de X , on lui attache une thêta-caractéristique π^*c de Y et l'on montre comment la parité de π^*c peut se calculer à partir de celle de c et des invariants introduits précédemment.

Coverings with odd ramification and theta-characteristics

Abstract — Let $\pi : Y \rightarrow X$ be a ramified covering of compact Riemann surfaces; assume that all the ramification degrees of π are odd. We define some invariants of π , belonging to $H^i(X, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ for $i=1, 2$, and we prove some relations between them. If c is a theta-characteristic of X , there is a corresponding theta-characteristic π^*c of Y , and we show how to compute the parity of π^*c from that of c , using the invariants defined above.

1. NOTATIONS. — Toutes les courbes algébriques considérées sont définies sur \mathbf{C} et sont lisses, connexes, projectives, non vides. On les identifie aux surfaces de Riemann correspondantes.

Si X est une telle courbe, on pose $H^i(X) = H^i(X, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$. On a $H^0(X) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} = H^2(X)$. Si x et y sont deux éléments de $H^1(X)$, on note $x \cdot y$ leur produit dans $H^2(X) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Par « fibré vectoriel », on entend un fibré vectoriel algébrique (ou analytique, c'est la même chose); on identifie un tel fibré au faisceau localement libre correspondant.

Si E est un fibré vectoriel orthogonal sur X , on note $w_i(E)$ ses classes de Stiefel-Whitney; on a $w_i(E) \in H^i(X)$. [Les classes de Stiefel-Whitney sont d'habitude définies seulement pour les fibrés à groupe structural le groupe orthogonal réel $O_n(\mathbf{R})$; on peut les définir aussi pour les fibrés orthogonaux complexes, grâce au fait que l'injection $O_n(\mathbf{R}) \rightarrow O_n(\mathbf{C})$ est une équivalence d'homotopie.]

2. REVÊTEMENTS À RAMIFICATION IMPAIRE : PREMIERS INVARIANTS. — Soit $\pi : Y \rightarrow X$ un revêtement ramifié de courbes algébriques, de degré n . Pour tout $y \in Y$, soit e_y l'indice de ramification de π en y . On fera dans toute la suite l'hypothèse que les e_y sont impairs.

A un tel revêtement sont attachés les invariants suivants :

(a) L'invariant $\omega(Y/X) \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Si u est un entier impair, on définit $\omega(u) \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ par :

$$(1) \quad \omega(u) \equiv (u^2 - 1)/8 \pmod{2}.$$

On pose :

$$(2) \quad \omega(Y/X) = \sum_{y \in Y} \omega(e_y) = \omega\left(\prod_{y \in Y} e_y\right).$$

On a $\omega(Y/X) = 0$ si et seulement si $\prod_{y \in Y} e_y \equiv \pm 1 \pmod{8}$.

(b) Le fibré orthogonal $E_{Y/X}$.

Soit $D_{Y/X}$ le diviseur de Y défini par $D_{Y/X} = \sum_{y \in Y} m_y y$, où $m_y = (e_y - 1)/2$. Son double est le diviseur différente de Y/X .

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

Soit $M_{Y/X} = \mathcal{O}_Y(D_{Y/X})$ le fibré vectoriel de rang 1 sur Y associé à $D_{Y/X}$ et soit $E_{Y/X} = \pi_* M_{Y/X}$ son image directe par π ; c'est un fibré vectoriel de rang n sur X . La forme trace relative à $Y \rightarrow X$ munit $E_{Y/X}$ d'une structure de *fibré orthogonal*.

(c) Les invariants $w_1(Y/X) \in H^1(X)$ et $w_2(Y/X) \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Ce sont les classes de Stiefel-Whitney du fibré $E_{Y/X}$ ci-dessus :

$$(3) \quad w_i(Y/X) = w_i(E_{Y/X}) \quad \text{pour } i=1, 2.$$

3. REVÊTEMENTS À RAMIFICATION IMPAIRE : INVARIANTS GALOISIENS. — Soit $\pi : Y \rightarrow X$ comme ci-dessus. On note $Y^{\text{gal}} \rightarrow X$ le revêtement galoisien correspondant, et G son groupe de Galois. Le groupe G s'identifie à un sous-groupe transitif du groupe symétrique \mathfrak{S}_n .

(d) L'invariant $w_1(G, \pi) \in H^1(X)$.

Puisque la ramification est impaire, l'homomorphisme

$$G \rightarrow \mathfrak{S}_n \xrightarrow{\text{sgn}} \{\pm 1\}$$

est trivial sur les sous-groupes d'inertie de G . Il définit donc un revêtement quadratique non ramifié de X , d'où un élément de $H^1(X)$. Nous noterons $w_1(G, \pi)$ cet élément.

(e) L'invariant $w_2(G, \pi) \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Soit $\tilde{\mathfrak{S}}_n$ l'extension de \mathfrak{S}_n par $\{\pm 1\}$ définie dans [6] et [7], et soit \tilde{G} l'image réciproque de G dans $\tilde{\mathfrak{S}}_n$.

Choisissons un sous-ensemble fini non vide V de X tel que π soit non ramifié en dehors de V . Soit $x \in X - V$, et soit $\Gamma = \pi_1(X - V; x)$ le groupe fondamental de $X - V$ en x . Le revêtement $Y^{\text{gal}} \rightarrow X$ est défini par un homomorphisme surjectif $\varphi : \Gamma \rightarrow G$. Pour tout $v \in V$, notons I_v le sous-groupe d'inertie de Γ en v (défini à conjugaison près); c'est un groupe cyclique engendré par un lacet tournant autour de v . Comme Γ est un groupe libre, on peut relever φ en un homomorphisme $\tilde{\varphi} : \Gamma \rightarrow \tilde{G}$. Pour $v \in V$, posons $\varepsilon_v(\tilde{\varphi}) = 0 \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ si $\tilde{\varphi}(I_v)$ est d'ordre impair et $\varepsilon_v(\tilde{\varphi}) = 1 \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ sinon. On montre facilement que l'élément

$$(4) \quad w_2(G, \pi) = \sum_{v \in V} \varepsilon_v(\tilde{\varphi}) \in \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$$

est indépendant des choix de V , φ et $\tilde{\varphi}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $w_2(G, \pi) = 0$;
- (ii) on peut choisir $\tilde{\varphi}$ de telle sorte que $\varepsilon_v(\tilde{\varphi}) = 0$ pour tout $v \in V$;
- (iii) il existe un revêtement quadratique *non ramifié* $\tilde{Y}^{\text{gal}} \rightarrow Y^{\text{gal}}$, et une action de \tilde{G} sur \tilde{Y}^{gal} compatible à l'action de G sur Y^{gal} .

Remarque. — Il est probable que les $w_i(G, \pi)$ peuvent aussi se définir au moyen de l'homomorphisme $H^i(G, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \rightarrow H^i(X)$ associé à l'action de G sur Y^{gal} , cf. [2], p. 204, cor. 5.2.3. C'est en tout cas vrai lorsque π est non ramifié, cf. n° 7 (i).

4. RELATIONS ENTRE LES INVARIANTS DE π . — Les $w_i(G, \pi)$ du n° 3 sont liés aux $w_i(Y/X)$ et à $\omega(Y/X)$ par les relations suivantes :

THÉORÈME 1. — Pour tout revêtement $\pi : Y \rightarrow X$ à ramification impaire, on a :

$$(5) \quad w_1(G, \pi) = w_1(Y/X) \quad \text{dans } H^1(X);$$

$$(6) \quad w_2(G, \pi) = w_2(Y/X) + \omega(Y/X) \quad \text{dans } \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}.$$

Soit U le fibré de rang 1 sur X défini par $U = \det(E_{Y/X})$. On vérifie facilement que $U \otimes U$ est isomorphe au fibré trivial 1_X et définit le revêtement quadratique de X intervenant dans (d) ci-dessus. La formule (5) en résulte.

On trouvera au n° 7 une démonstration de la formule (6) utilisant les thêta-caractéristiques; il serait intéressant de trouver une méthode plus directe.

Question. — Existe-t-il une formule englobant comme cas particuliers à la fois (6) et la formule pour l'invariant de Witt de $\text{Tr}(x^2)$ démontrée dans [6] ?

5. THÊTA-CARACTÉRISTIQUES ET FIBRÉS ORTHOGONAUX. — Rappelons (*cf.* [1], [4]) qu'une thêta-caractéristique de X est un fibré L de rang 1 sur X tel que $L \otimes L$ soit isomorphe au fibré canonique Ω_X . On note Θ_X le sous-ensemble de $\text{Pic}(X)$ formé des classes de tels fibrés; c'est un espace principal homogène sur le sous-groupe $\text{Pic}_2(X)$ formé des $a \in \text{Pic}(X)$ tels que $2a=0$, sous-groupe qui s'identifie comme on sait à $H^1(X)$.

Si $c \in \Theta_X$ correspond au fibré L , on définit $i(c) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ par :

$$(7) \quad i(c) \equiv \dim H^0(X, L) \pmod{2}.$$

La fonction $i : \Theta_X \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est une *fonction quadratique* (*loc. cit.*). De façon plus précise, on a :

$$(8) \quad i(c+x+y) + i(c+x) + i(c+y) + i(c) = x \cdot y \quad (c \in \Theta_X, x, y \in H^1(X)).$$

Soit maintenant E un fibré orthogonal sur X de rang n .

THÉORÈME 2. — Si $c \in \Theta_X$ correspond au fibré L , on a :

$$(9) \quad \dim H^0(X, L \otimes E) \equiv (n+1)i(c) + i(c + w_1(E)) + w_2(E) \pmod{2}.$$

Cela peut se prouver en remarquant que la parité de $\dim H^0(X, L \otimes E)$ ne dépend que de l'image de E dans le groupe « $\text{KO}(X)$ », et en utilisant la détermination de $\text{KO}(X)$ donnée dans [1]. Une autre méthode consiste à se ramener (par déformation continue, sommes directes, produits tensoriels...) aux deux cas particuliers suivants :

(a) E est un fibré de rang 1 dont la classe e appartient à $\text{Pic}_2(X) = H^1(X)$. Les deux membres de (9) sont alors égaux à $i(c+e)$.

(b) $E = M \oplus M^{-1}$ est un fibré hyperbolique, avec M de rang 1 ([4], p. 185, (2)). On a alors :

$$(10) \quad w_1(E) = 0 \quad \text{et} \quad w_2(E) \equiv \deg(M) \pmod{2}.$$

Le membre de droite de (9) est $w_2(E)$, et le membre de gauche est $\deg(M) \pmod{2}$ d'après le théorème de Riemann-Roch appliqué à $L \otimes E$ ([4], p. 186) : on obtient bien l'égalité cherchée.

6. COMPORTEMENT DES THÊTA-CARACTÉRISTIQUES DANS LES REVÊTEMENTS À RAMIFICATION IMPAIRE. — Soit $\pi : Y \rightarrow X$ un revêtement de degré n , à ramification impaire, *cf.* nos 2, 3, 4. Le fibré canonique Ω_Y de Y est lié au fibré canonique Ω_X par la formule :

$$(11) \quad \Omega_Y = \pi^* \Omega_X \otimes M_{Y/X}^{\otimes 2}, \quad \text{où} \quad M_{Y/X} = \mathcal{O}_Y(D_{Y/X}), \quad \text{cf. n° 2 (b)}.$$

Il s'ensuit que, si L est une thêta-caractéristique de X , le fibré L_Y défini par :

$$(12) \quad L_Y = \pi^* L \otimes M_{Y/X}$$

est une thêta-caractéristique de Y . On obtient ainsi une application $\pi' : \Theta_X \rightarrow \Theta_Y$, que l'on peut caractériser par la formule

$$(13) \quad \pi'(c) = \pi^*(c) + d_{Y/X} \quad (c \in \Theta_X),$$

où $d_{Y/X}$ est l'image du diviseur $D_{Y/X}$ dans $\text{Pic}(Y)$. La parité $i(\pi'(c))$ de $\pi'(c)$ est donnée par le résultat suivant :

THÉORÈME 3. — Pour tout $c \in \Theta_X$, on a :

$$(14) \quad i(\pi'(c)) = (n+1)i(c) + i(c + w_1(Y/X)) + w_2(Y/X).$$

Soit L une thêta-caractéristique de classe c . On a

$$i(\pi'(c)) \equiv \dim H^0(Y, L_Y) \equiv \dim H^0(X, \pi_* L_Y) \pmod{2}.$$

D'autre part, on a

$$\pi_* L_Y = L \otimes \pi_* M_{Y/X} = L \otimes E_{Y/X}, \quad \text{cf. n}^\circ 2 (b).$$

La formule (14) résulte alors de (9), appliquée au fibré orthogonal $E = E_{Y/X}$.

Remarque. — En combinant (5), (6) et (14), on obtient :

$$(15) \quad i(\pi'(c)) = (n+1)i(c) + i(c + w_1(G, \pi)) + w_2(G, \pi) + \omega(Y/X).$$

Inversement, si (15) est vraie pour une valeur de $c \in \Theta_X$, alors (6) est vraie pour π , et (15) est vraie pour tout $c \in \Theta_X$.

Cas particuliers. — (i) Si G est d'ordre impair, on a $w_1(G, \pi) = 0$ et (15) se réduit à :

$$(16) \quad i(\pi'(c)) = i(c) + \omega(Y/X).$$

(ii) Supposons que le genre de X soit 0. L'ensemble Θ_X est réduit à un seul élément c , caractérisé par $\deg(c) = -1$; on a $i(c) = 0$. La formule (15) donne :

$$(17) \quad i(\pi'(c)) = w_2(G, \pi) + \omega(Y/X);$$

aux notations près, c'est la formule (13) de [7].

Dans le cas encore plus particulier où le genre de Y est 0, on a $i(\pi'(c)) = 0$ et (17) devient :

$$(18) \quad w_2(G, \pi) = \omega(Y/X), \quad \text{cf. [7], formule (10)}.$$

On peut en outre montrer que le fibré orthogonal $E_{Y/X}$ est trivial, ce qui explique certains calculs de J.-F. Mestre [3] et de L. Schneps [5].

7. DÉMONSTRATION DE LA FORMULE (6). — (i) *Le cas non ramifié.* — Supposons π non ramifiée. On a alors $\omega(Y/X) = 0$ et la formule à démontrer se réduit à :

$$(19) \quad w_2(G, \pi) = w_2(Y/X).$$

De plus, le diviseur $D_{Y/X}$ est nul, d'où $M_{Y/X} = \mathcal{O}_Y$ et $E_{Y/X} = \pi_* \mathcal{O}_Y$. Le fibré orthogonal $E_{Y/X}$ est localement constant; il est déduit du fibré principal $Y^{\text{gal}} \rightarrow X$ de groupe G par l'homomorphisme $G \rightarrow \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathbf{O}_n$. Sa classe de Stiefel-Whitney $w_2(Y/X)$ est donc l'image réciproque de la classe $s_n \in H^2(\mathfrak{S}_n, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ correspondant à $\tilde{\mathfrak{S}}_n$, cf. [6], n° 1.5; l'égalité (19) en résulte.

(ii) *Le cas cyclique d'ordre premier $\neq 2$.* — On suppose que le revêtement π est cyclique d'ordre premier $p \neq 2$. On a alors $Y = Y^{\text{gal}}$, $G \cong \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ et $w_2(G, \pi) = 0$ puisque G est d'ordre impair.

Si s est le nombre de points de ramification de π , on a

$$(20) \quad \omega(Y/X) = s \omega(p),$$

et la formule à démontrer s'écrit

$$(21) \quad w_2(Y/X) = s \omega(p).$$

Or l'action du groupe G sur le fibré vectoriel $E_{Y/X}$ décompose celui-ci en somme directe de fibrés de rang 1 :

$$(22) \quad E_{Y/X} = \bigoplus L_\alpha,$$

indexés par le dual de G , i. e. $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. On voit facilement que L_0 est le fibré trivial 1_X et que L_α est orthogonal aux L_β pour $\beta \neq -\alpha$. Le fibré orthogonal $E_{Y/X}$ s'écrit donc

$$(23) \quad E_{Y/X} = 1_X \oplus (L_1 \oplus L_{-1}) \oplus \dots \oplus (L_m \oplus L_{-m}), \quad \text{avec } m = (p-1)/2,$$

les fibrés L_α et $L_{-\alpha}$ étant duaux l'un de l'autre. D'après (10), on a

$$(24) \quad w_2(E_{Y/X}) \equiv \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} \deg(L_\alpha) \pmod{2}.$$

Tout revient donc à calculer les degrés des L_α . Pour cela, soient K_X et K_Y les corps de fonctions de X et Y ; l'extension K_Y/K_X est cyclique de degré p . Choisissons $f \in K_X^*$ tel que $K_Y = K_X(f^{1/p})$. La fonction $f^{\alpha/p}$ s'identifie à une section rationnelle du fibré L_α . De plus, si l'on note a_x la valuation en $x \in X$ de f , et si l'on définit un diviseur D_α de X par la formule :

$$(25) \quad D_\alpha = \sum_{x \in X} [\alpha a_x/p + 1/2] x,$$

on constate que la multiplication par $f^{\alpha/p}$ définit un isomorphisme du fibré $\mathcal{O}_X(D_\alpha)$ sur le fibré L_α . On a donc :

$$(26) \quad \deg(L_\alpha) = \sum_{x \in X} [\alpha a_x/p + 1/2],$$

d'où d'après (24) :

$$(27) \quad w_2(E_{Y/X}) \equiv \sum_{x \in X} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} [\alpha a_x/p + 1/2] \pmod{2}.$$

Or, on a le lemme suivant, qui se vérifie facilement :

LEMME 1. — Soient a un entier, p un nombre premier $\neq 2$ et $m = (p-1)/2$. On a :

$$(28) \quad \sum_{\alpha=1}^{\alpha=m} [\alpha a/p + 1/2] \equiv \begin{cases} a \omega(p) & \pmod{2} & \text{si } a \equiv 0 \pmod{p} \\ (a+1) \omega(p) & \pmod{2} & \text{si } a \not\equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

Le nombre des a_x non divisibles par p est égal à s . En combinant (27) et (28), on obtient donc

$$(29) \quad w_2(E_{Y/X}) \equiv s \omega(p) + \omega(p) \sum_{x \in X} a_x \pmod{2}.$$

Comme $\sum_{x \in X} a_x = \deg(f) = 0$, on obtient bien la formule (21).

(La possibilité d'un tel calcul m'a été signalée par A. Beauville.)

(iii) *Un lemme de réduction.* — On revient au cas général d'un revêtement $\pi : Y \rightarrow X$, de degré n , à ramification impaire, de groupe de Galois $G \subset \mathfrak{S}_n$.

Soit p un nombre premier $\neq 2$, et soit $\varphi : Z \rightarrow X$ un revêtement ramifié qui soit cyclique de degré p . Faisons l'hypothèse que les extensions de corps correspondant à $Z \rightarrow X$ et à $Y^{\text{gal}} \rightarrow X$ sont linéairement disjointes. Cela permet de construire un diagramme

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\psi} & Y \\ \pi_Z \downarrow & & \downarrow \pi \\ Z & \xrightarrow{\varphi} & X \end{array}$$

où $\pi_Z : T \rightarrow Z$ est un revêtement de degré n , à même groupe de Galois G que π , et où $\psi : T \rightarrow Y$ est cyclique de degré p . (On peut définir T comme la *normalisée* du produit fibré de Z et de Y au-dessus de X .)

LEMME 2. — Si la formule (6) est vraie pour π_Z , elle l'est aussi pour π .

Il revient au même de montrer que, si la formule (15) est vraie pour π_Z , elle l'est aussi pour π . C'est ce que nous allons faire.

Soit $c_X \in \Theta_X$. Notons c_Y, c_Z, c_T les éléments correspondants de $\Theta_Y, \Theta_Z, \Theta_T$:

$$(30) \quad c_Y = \pi'(c_X); \quad c_Z = \varphi'(c_X); \quad c_T = \pi'_Z(c_Z) = \psi'(c_Y).$$

On a les formules suivantes :

$$(31) \quad i(c_T) = (n+1)i(c_Z) + i(c_Z + w_1(G, \pi_Z)) + w_2(G, \pi_Z) + \omega(T/Z),$$

$$(32) \quad i(c_T) = i(c_Y) + \omega(T/Y),$$

$$(33) \quad i(c_Z) = i(c_X) + \omega(Z/X),$$

$$(34) \quad i(c_Z + w_1(G, \pi_Z)) = i(c_X + w_1(G, \pi)) + \omega(Z/X),$$

$$(35) \quad \omega(T/Y) + \omega(Y/X) = \omega(T/Z) + n\omega(Z/X),$$

$$(36) \quad w_2(G, \pi_Z) = w_2(G, \pi).$$

En effet, (31) résulte de ce que (15) est vraie pour π_Z par hypothèse; (32) et (33) résultent de (ii) appliqué aux revêtements cycliques ψ et φ ; il en est de même de (34), compte tenu du fait que $w_1(G, \pi_Z) = \varphi^*(w_1(G, \pi))$; (35) se démontre en vérifiant que les deux membres sont égaux à $\omega(T/X)$; enfin, (36) se prouve par un calcul direct.

Si l'on ajoute les inégalités (31) à (36), après avoir multiplié (33) par $n+1$, on obtient :

$$(37) \quad i(c_Y) = (n+1)i(c_X) + i(c_X + w_1(G, \pi)) + w_2(G, \pi) + \omega(Y/X),$$

ce qui est bien la formule (15).

(iv) *Fin de la démonstration.* — Soit $N(\pi)$ le ppcm des indices de ramification e_i de π . On raisonne par récurrence sur $N(\pi)$. Si $N(\pi) = 1$, π est non ramifié, et on applique (i). Si $N(\pi) > 1$, on choisit un facteur premier p de $N(\pi)$, et l'on construit un revêtement $\varphi : Z \rightarrow X$, cyclique de degré p , possédant les propriétés suivantes :

(38) il est ramifié en tous les points de X où π est ramifié;

(39) il est ramifié en au moins un point de X où π n'est pas ramifié.

(L'existence d'un revêtement se démontre facilement.)

La propriété (39) assure que $\varphi : Z \rightarrow X$ est disjoint de π , au sens de (iii) ci-dessus. On en déduit comme dans (iii) un revêtement $\pi_Z : T \rightarrow Z$. La propriété (38), jointe au lemme d'Abhyankar, entraîne que $N(\pi_Z) = N(\pi)/p$, d'où $N(\pi_Z) < N(\pi)$. Vu l'hypothèse de récurrence, la formule (6) est vraie pour π_Z . Elle est donc vraie pour π , d'après le lemme 2.

Note remise et acceptée le 3 septembre 1990.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] M. F. ATIYAH, Riemann surfaces and spin structures, *Ann. E.N.S.*, (4), 4, 1971, p. 47-62 (= *Coll. Works*, III, n° 75).
- [2] A. GROTHENDIECK, Sur quelques points d'algèbre homologique, *Tôhoku Math. J.*, 9, 1957, p. 119-221.
- [3] J.-F. MESTRE, Extensions régulières de $\mathbf{Q}(T)$ de groupe de Galois \tilde{A}_n , *J. Algebra*, 131, 1990, p. 483-495.
- [4] D. MIMFORD, Theta-characteristics of an algebraic curve, *Ann. E.N.S.* (4), 4, 1971, p. 181-192.
- [5] L. SCHNEPS, Explicit construction of extensions of $K(t)$ of Galois group \tilde{A}_n for n odd, *J. Algebra* (à paraître).
- [6] J.-P. SERRE, L'invariant de Witt de la forme $\text{Tr}(x^2)$, *Comm. Math. Helv.*, 59, 1984, p. 651-676 (= *Oe.* 131).
- [7] J.-P. SERRE, Relèvements dans \tilde{A}_n , *C.R. Acad. Sci. Paris*, 311, série I, 1990, p. 477-482.