

О представляющих и абсолютно представляющих системах в банаховых пространствах

Р.В. Вершинин

Харьковский государственный университет,
Украина, 310077, г. Харьков, пл. Свободы, 4

Статья поступила в редакцию 22 октября 1996 года

Изучаются топологические свойства представляющих систем (ПС) и абсолютно представляющих систем (АПС). Построена переполненная ПС в гильбертовом пространстве; как следствие получены ”переполняющие” возможности базисов. Описаны АПС в суперрефлексивных пространствах в терминах скорости сходимости разложений.

Пусть X – банахово пространство; его единичный шар будем обозначать через $B(X)$, единичную сферу – через $S(X)$. Пусть $\{x_n\}_1^\infty \subset X$ – последовательность векторов; ее замкнутая линейная оболочка обозначается через $[x_n]$.

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ называется представляющей (ПП), если любой вектор $x \in [x_n]$ можно разложить в ряд по x_n :

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, \quad a_n \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Далее, $\{x_n\}$ называется абсолютно представляющей (АПП), если ряд (1) можно выбрать абсолютно сходящимся.

Следуя терминологии Ю.Ф. Коробейника [1], полную ПП будем называть представляющей системой (ПС), а полную АПП – абсолютно представляющей системой (АПС). Понятие АПС восходит к С. Мазуру (см. [2, с. 209–210]), различные примеры можно найти в [3, 4].

Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ является (C_1, C_2) -эквивалентной последовательности $\{y_n\}$, если существует изоморфизм $T : [x_n] \rightarrow [y_n]$ такой, что $Tx_n = y_n$, $n = 1, 2, \dots$, причем $\|T\| \leq C_1$, $\|T^{-1}\| \leq C_2$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется эквивалентной $\{y_n\}$, если она (C_1, C_2) -эквивалентна $\{y_n\}$ для некоторых C_1, C_2 .

Следующие ниже утверждения 1 и 2 носят технический характер. По существу, в несколько иных формулировках они известны и приводятся здесь для удобства читателя.

Утверждение 1. *Образ базиса при отображении факторизации является ПС в фактор-пространстве. Наоборот, любая ПП эквивалентна образу некоторого базиса при отображении факторизации.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первая часть очевидна. Пусть теперь $\{x_n\}$ есть ПП. Рассмотрим нормированное пространство числовых последовательностей

$$G = \left\{ (a_n)_1^\infty : \text{ряд } \sum_{n=1}^\infty a_n x_n \text{ сходится} \right\}$$

с нормой $\|(a_n)\| = \sup_N \|\sum_1^N a_n x_n\|$. Известно, что G – банахово пространство [1]. Канонические векторы $e_n = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ образуют базис в G . Определим линейный непрерывный оператор $T: G \rightarrow [x_n]$ соотношениями $T e_n = x_n$, $n = 1, 2, \dots$. Поскольку $\{x_n\}$ является ПС, оператор T сюръективен. Значит, его инъективизация $\hat{T}: G/\text{Ker } T \rightarrow [x_n]$ по теореме об обратном операторе является изоморфизмом и устанавливает искомую эквивалентность.

Утверждение 2. *Для последовательности $\{x_n\}$ следующие условия эквивалентны:*

- а) $\{x_n\}$ является АПП;
- б) найдется число δ такое, что любой вектор $x \in [x_n]$ разлагается в ряд (1), причем $\sum \|a_n x_n\| \leq \delta \|x\|$;
- в) $\{x_n/\|x_n\|\}$ является $(\delta, 1)$ -эквивалентной образу канонического базиса l_1 при некотором фактор-отображении;
- г) $B([x_n]) \subset \delta \cdot \text{abs.conv}\{x_n/\|x_n\|\}$ для некоторого δ ;
- д) найдется δ такое, что

$$\forall x^* \in [x_n]^* \exists n : \delta |x^*(x_n)| \geq \|x^*\| \cdot \|x_n\|.$$

Наименьшая возможная константа δ во всех пунктах – одна и та же; будем называть ее константой АПП $\{x_n\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) $\implies$ в). Пусть $\{x_n\}$ – АПП. Тогда линейный непрерывный оператор $T: l_1 \rightarrow [x_n]$, определенный соотношениями $T e_n = x_n/\|x_n\|$, $n = 1, 2, \dots$, является сюръекцией. Рассмотрим его инъективизацию, $\hat{T}: l_1/\text{Ker } T \rightarrow [x_n]$. По теореме об обратном операторе $\hat{T}$

– изоморфизм. Кроме того, $\|\hat{T}\| = \|T\| = 1$, поэтому $\hat{T}^{-1}$ устанавливает $(\delta, 1)$ -эквивалентность между $\{x_n/\|x_n\|\}$ и $\{qe_n\}$, где q – отображение факторизации $l_1 \rightarrow l_1/\text{Ker } T$.

б) $\iff$ в). Перепишем условие б) в следующем виде: $\{x_n\}$ – АПП и для любого $x \in [x_n]$

$$\begin{aligned} \delta\|x\| &\geq \inf \left\{ \sum |a_n| : x = \sum a_n x_n / \|x_n\| \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum |a_n| : \hat{T}^{-1}x = q \left(\sum a_n e_n \right) \right\} = \|\hat{T}^{-1}x\|. \end{aligned}$$

Таким образом, условие б) означает, что $\{x_n\}$ – АПП и $\|\hat{T}^{-1}\| \leq \delta$, а условие в) – что определена эквивалентность

$$\hat{T}_L : l_1/L \rightarrow [x_n], \quad \hat{T}_L(qe_n) = x_n/\|x_n\|,$$

где L – некоторое подпространство l_1 , $q : l_1 \rightarrow l_1/L$ – отображение факторизации, причем $\|\hat{T}_L\| = 1$ и $\|\hat{T}_L^{-1}\| \leq \delta$. Легко видеть, что $L = \{(a_n) \in l_1 : \sum a_n x_n / \|x_n\| = 0\} = \text{Ker } T$, т.е. $\hat{T}_L = \hat{T}$. Значит, б) $\iff$ в).

б) $\iff$ а), б) $\iff$ г) – очевидны.

б) $\iff$ д). Заметим сначала, что если оператор T сюръективен, то из $T = \hat{T}q$ следует, что $(T^*)^{-1} = (\hat{T}^*)^{-1}(q^*)^{-1}$, поэтому $\|(T^*)^{-1}\| = \|\hat{T}^{-1}\|$. С другой стороны, мы знаем, как действует T^* :

$$T^*x^* = (x^*(x_n/\|x_n\|))_1^\infty \in l_\infty, \quad x^* \in [x_n]^*.$$

Если выполнено условие б), то, как показано выше, T – сюръекция и $\|\hat{T}^{-1}\| \leq \delta$, т.е. $\|(T^*)^{-1}\| \leq \delta$; значит, $\|T^*x^*\| \geq \delta\|x^*\|$ для всех $x^* \in [x_n]^*$. Отсюда следует д). Наоборот, если выполнено условие д), то $\|(T^*)^{-1}\| \leq \delta$; значит, T^* – изоморфное вложение, т.е. T – сюръекция, поэтому $\{x_n\}$ – АПП и $\|\hat{T}^{-1}\| \leq \delta$, т.е. выполнено условие б). Утверждение доказано.

Перейдем к изучению топологических свойств ПП и АПП.

Утверждение 3. *Бесконечномерная нормированная АПП – не относительно компактное множество.*

Доказательство. Если $\{x_n\}$ – нормированная АПП, то, согласно утверждению 2, множество $\text{abs.conv } \{x_n\}$ не относительно компактно, поэтому и $\{x_n\}$ не относительно компактно.

Теорема 1. *Сепарабельное банахово пространство X нерефлексивно в том и только в том случае, если любая АПС в X содержит базисную подпоследовательность.*

Доказательство. Пусть X – нерефлексивное и $\{x_n\} \subset S(X)$ – АПС. Согласно пункту в) утверждения 2, можно считать X образом фактор-отображения $q : l_1 \rightarrow X$, причем $qe_n = x_n$, $n = 1, 2, \dots$. Оператор q не слабо компактен, значит, множество $\{qe_n\} = \{x_n\}$ не относительно слабо компактно (см. [5, упражнение VII.5]). Тогда, по теореме Эберлейна–Шмульяна, найдется подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, не содержащая слабо сходящихся подпоследовательностей. По теореме М.И. Кадеца–А. Пелчинского (см. [6]), $\{x_{n_k}\}$ содержит базисную подпоследовательность.

Пусть теперь X рефлексивно. Зафиксируем произвольный функционал $x^* \in S(X^*)$ и рассмотрим множество

$$K = \left\{ x \in S(X) : |x^*(x)| > \frac{1}{4} \right\}.$$

Легко видеть, что $B(X) \subset 2 \overline{\text{co}} K$, поэтому для последовательности $\{x_n\} \subset K$, плотной в K , выполнено условие г) утверждения 2. Таким образом, $\{x_n\}$ является АПС. Далее, 0 не является слабо предельной точкой $\{x_n\}$ по определению множества K . С другой стороны, всякая базисная последовательность в рефлексивном пространстве слабо сходится к нулю (см. [7, §1.в]). Значит, $\{x_n\}$ не содержит базисных подпоследовательностей. Теорема доказана.

Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ называется *переполненной*, если для любой бесконечной подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ $[x_{n_k}] = [x_n]$.

Теорема 2. В пространстве l_2 существует переполненная ПС $\{x_n\}$. Более того, $\{x_n\}$ нормирована и сходится к ненулевому вектору.

Для доказательства потребуется лемма, представляющая и самостоятельный интерес. Напомним, что последовательность $\{x_n\}$ называется минимальной, если $x_m \notin [x_n]_{n \neq m}$, $m = 1, 2, \dots$.

Лемма 1. Пусть $\{x_n\}$ – нормированная минимальная последовательность. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- а) $\{x_n\}$ не эквивалентна каноническому базису l_1 ;
- б) существует подпространство L пространства $[x_n]$ бесконечной коразмерности такое, что

$$\lim_n \text{dist}(x_n, L) = 0.$$

Доказательство. а) $\implies$ б). Как утверждает теорема 3.14 из [6], условие а) эквивалентно существованию такого сходящегося ряда $\sum a_n x_n$,

что $\sum |a_n| = \infty$. Поэтому найдется разбиение натурального ряда на конечные блоки A_k такое, что

$$\sum_{n \in A_k} |a_n| = M_k > 1, \quad k = 1, 2, \dots$$

Рассмотрим для каждого k векторы

$$z_k = \sum_{n \in A_k} a_n x_n$$

и

$$u_n = x_n - \frac{\text{sign}(a_n)}{M_k} z_k \quad \text{при } n \in A_k.$$

Проверим, что подпространство $L = [u_n]$ удовлетворит условию б). Действительно, $\text{dist}(x_n, L) \leq \|x_n - u_n\| \leq \|z_k\|$ при $n \in A_k$, тогда как $\lim_k \|z_k\| = 0$. Далее, для каждого k

$$\sum_{n \in A_k} a_n u_n = \sum_{n \in A_k} a_n x_n - \frac{\sum_{n \in A_k} |a_n|}{M_k} z_k = 0$$

по определению M_k и z_k . Таким образом, $[u_n]_{n \in A_k}$ есть собственное подпространство в $[x_n]_{n \in A_k}$ для каждого k . Поэтому найдутся ненулевые функционалы $g_k^* \in ([x_n]_{n \in A_k})^*$ такие, что

$$g_k^* \in ([u_n]_{n \in A_k})^\perp, \quad k = 1, 2, \dots$$

Отсюда легко следует, что последовательность функционалов $\{y_k^*\}_1^\infty \subset [x_n]^*$, определенная соотношениями $y_k^*(x) = g_k^*(P_k x)$, где P_k – проекция на $[x_n]_{n \in A_k}$ параллельно $[x_n]_{n \notin A_k}$, является линейно независимой и $\{y_k^*\} \subset ([u_n]_1^\infty)^\perp$, поэтому $\text{codim}[u_n] = \infty$.

б) $\implies$ а). Предположим, что выполнено условие б) и $\{x_n\}$ эквивалентна каноническому l_1 -базису. Найдутся векторы $y_n \in L$ такие, что $\lim_n \|x_n - y_n\| = 0$. Тогда, по известному свойству устойчивости l_1 -базисов [6], для некоторого номера N последовательность $\{x_n\}_1^N \cup \{y_n\}_{N+1}^\infty$ эквивалентна $\{x_n\}_1^\infty$ и полна в $[x_n]_1^\infty$. Таким образом, $\text{codim } L \leq \text{codim}[y_n]_{N+1}^\infty \leq N$. Противоречие. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Пусть $\{e_n\}$ – канонический базис l_2 . По лемме 1, существует подпространство $L \subset l_2$ бесконечной коразмерности такое, что $\lim_n \text{dist}(e_n, L) = 0$. Пусть $Z = l_2/L$ и q – отображение факторизации $l_2 \rightarrow Z$. Поскольку $\lim_n \|qe_n\| = 0$, найдутся числа ε_n $n = 1, 2, \dots$, такие, что

$$0 < \varepsilon_n < 1, \quad \lim_n \varepsilon_n = 0, \quad \lim_n \|qe_n\|/\varepsilon_n = 0.$$

Поэтому для ПС $\bar{x}_n = qe_n/\|qe_n\| \subset S(Z)$ коэффициенты представления могут выбираться быстро сходящимися к нулю:

$$\forall z \in Z: \quad z = \sum b_n \bar{x}_n, \quad \lim_n b_n/\varepsilon_n = 0. \quad (2)$$

Положим

$$\begin{aligned} a_{k,n} &= 2^{-k} \varepsilon_n^{1-\frac{1}{k}}, \quad n, k = 1, 2, \dots; \\ x_n &= \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,n} \bar{x}_k, \quad n = 1, 2, \dots; \\ y_n &= x_n + \varepsilon \bar{x}_n, \quad n = 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

Мы утверждаем, что последовательность $\{u_n\} = \{x_n/\|x_n\|, y_n/\|y_n\|\}$ (с чередующимися членами $x_n/\|x_n\|$ и $y_n/\|y_n\|$) обладает требуемыми свойствами в $Z \equiv l_2$. Вначале заметим, что

$$\sup_n \|x_n\| < \infty \quad (3)$$

и

$$\lim_n \frac{\varepsilon_n}{a_{r,n}} = 0, \quad r = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Кроме того,

$$\lim_n \frac{\sum_{k=r+1}^{\infty} a_{k,n}}{a_{r,n}} = 0, \quad r = 1, 2, \dots; \quad (5)$$

действительно,

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=r+1}^{\infty} 2^{-k} \varepsilon_n^{1-\frac{1}{k}}}{2^{-r} \varepsilon_n^{1-\frac{1}{r}}} &= \varepsilon_n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}} \sum_{k=r+1}^{\infty} 2^{-(k-r)} \varepsilon_n^{\frac{1}{r+1}-\frac{1}{k}} \\ &\leq \varepsilon_n^{\frac{1}{r}-\frac{1}{r+1}} \cdot 1 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad r = 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

Таким образом, $\{u_n\}$ является ПС: любой вектор $z \in Z$ представляется, в силу (2) и (3), сходящимся рядом

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} (-(b_n/\varepsilon_n)x_n + (b_n/\varepsilon_n)y_n).$$

Далее, учитывая (5), имеем для каждого $r = 1, 2, \dots$

$$\left\| \frac{x_n - \sum_{k=1}^{r-1} a_{k,n} \bar{x}_k}{a_{r,n}} - \bar{x}_r \right\| = \left\| \frac{\sum_{k=r+1}^{\infty} a_{k,n} \bar{x}_k}{a_{r,n}} \right\|$$

$$\leq \frac{\sum_{k=r+1}^{\infty} a_{k,n}}{a_{r,n}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty), \quad r = 1, 2, \dots,$$

и, с учетом (6) и (4),

$$\begin{aligned} \frac{y_n - \sum_{k=1}^{r-1} a_{k,n} \bar{x}_k}{a_{r,n}} - \bar{x}_r &= \left(\frac{x_n - \sum_{k=1}^{r-1} a_{k,n} \bar{x}_k}{a_{r,n}} - \bar{x}_r \right) \\ &+ \frac{\varepsilon_n}{a_{r,n}} \bar{x}_n \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty), \quad r = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя $r = 1$ в (6) и (7), получаем $\lim_n \|x_n/a_{1,n} - \bar{x}_1\| = 0$ и $\lim_n \|y_n/a_{1,n} - \bar{x}_1\| = 0$, т.е. $\{u_n\}$ действительно стремится к ненулевому вектору. Кроме того, из (6) и (7) при помощи индукции по $r = 1, 2, \dots$ получаем, что $\bar{x}_r \in [x_{n_k}]$ и $\bar{x}_r \in [y_{n_k}]$ для любых бесконечных подпоследовательностей $\{x_{n_k}\}$ и $\{y_{n_k}\}$. Таким образом, $\{u_n\}$ переполнена. Теорема доказана.

Из теоремы 2 следуют неожиданные "переполняющие" возможности базисов.

Следствие 1. *Образ базиса при фактор-отображении может быть переполненной последовательностью.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно к переполненной ПС применить утверждение 1.

Следствие 2. *В некотором банаховом пространстве X существуют базисная последовательность $\{x_n\}$ и подпространство L такие, что $[x_{n_k}]$ и L – квазидополнительные подпространства для любой бесконечной подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$ (т.е. $[x_{n_k}] \cap L = 0$ и $[\bar{x}_{n_k}] + L = X$).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{z_m\}$ – полная переполненная ПС в l_2 . Тогда, согласно утверждению 1 и его доказательству, можно считать, что $z_m = qe_m$, где $\{e_m\}$ – канонический базис пространства $G = \{(a_n) : \text{ряд } \sum a_n x_n \text{ сходится}\}$, q – фактор-отображение $G \rightarrow G/L = l_2$, $L = \{(a_n) : \sum a_n x_n = 0\} \subset G$.

Выделим по теореме Эрдеша–Страуса (см. [8, § I.1.6; 9]) из $\{z_m\}$ ω -линейно независимую подпоследовательность $\{z_{m_n}\}$ и положим

$$x_n = e_{m_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Зафиксируем произвольную бесконечную подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$. Поскольку $\{qx_n\}$ полна в G/L и переполнена, $[x_{n_k}] + L$ плотно в G . Кроме того, $[x_{n_k}] \cap L = 0$ в силу ω -линейной независимости $\{qx_n\}$ и по определению L .

З а м е ч а н и е. Как сообщил автору В.М. Кадец, не существует последовательности, каждая бесконечная подпоследовательность которой являлась бы ПС. Действительно, допустим, что такая последовательность $\{x_n\}$ существует. Выделим из нее по теореме Эрдеша–Страуса ω -линейно независимую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Эта подпоследовательность есть ПС и, следовательно, является базисом. Тогда $x_1 \notin [x_{n_k}]_{k=2}^\infty$, значит, $\{x_{n_k}\}_{k=2}^\infty$ неполна. Противоречие.

Рассмотрим теперь один важный случай – АПС в суперрефлексивных пространствах. Напомним, что банахово пространство называется равномерно гладким, если функция

$$\rho(\tau) = \sup \left\{ \frac{\|x - y\| + \|x + y\|}{2} - 1 : x, y \in X, \|x\| = 1, \|y\| \leq \tau \right\},$$

называемая модулем гладкости X , удовлетворяет условию

$$\rho(\tau)/\tau \rightarrow 0 \quad (\tau \rightarrow 0).$$

Каждое равномерно гладкое пространство суперрефлексивно, каждое суперрефлексивное пространство является равномерно гладким в некоторой эквивалентной норме [10].

Определение 3. Последовательность $\{x_n\}$ называется (C, q) -быстрой ПП, если любой $x \in [x_n]$ представляется рядом

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{n(k)}, \quad \|a_k x_{n(k)}\| \leq C \|x\| q^k,$$

где $k \mapsto n(k)$ – инъективное отображение, зависящее от x . Система $\{x_n\}$ называется быстрой ПП, если она является (C, q) -быстрой ПП для некоторых $C > 0$ и $q \in (0, 1)$. Полную быструю ПП будем называть быстрой представляющей системой (быстрой ПС).

Ясно, что каждая быстрая ПП является АПП.

Теорема 3. Пусть X – равномерно гладкое пространство, $\{x_n\} \subset X$ – нормированная последовательность. Тогда следующие условия эквивалентны:

- а) $\{x_n\}$ – АПС;
- б) $\{x_n\}$ – быстрая ПС;
- в) для некоторого $t \in \mathbb{R}$, множество $\{\pm t x_n\}_1^\infty$ образует ε -сеть $S(X)$ с $\varepsilon < 1$.

Нам понадобится лемма о локально-эквивалентной норме на X .

Лемма 2. Пусть X – банахово пространство, и пусть вектор $x \in S(X)$ и функционал $x^* \in S(X^*)$ такие, что $x^*(x) = 1$. Тогда для любого $\tau \in (0, 1)$ и любого $z \in X$ такого, что $\|x - z\| \leq \tau/3$, выполняется оценка

$$x^*(z) \leq \|z\| \leq (1 + 2\rho(\tau))x^*(z),$$

где $\rho(\tau)$ – модуль гладкости X .

Доказательство. Заметим сначала, что если $y \in \text{Ker } x^*$ и $\|y\| \leq \tau$, то

$$\|x - y\| \leq 1 + 2\rho(\tau). \quad (7)$$

Действительно, по определению $\rho(\tau)$,

$$2\rho(\tau) \geq \|x - y\| + \|x + y\| - 2 \geq \|x - y\| + x^*(x + y) - 2 \geq \|x - y\| + 1 - 2,$$

что и доказывает (8). Далее, если вектор $z \in X$ такой, что $\|x - z\| \leq \tau/3$, то можно применить (8) к вектору $y = x - z/x^*(z)$; получим $1 + 2\rho(\tau) \geq \|x - y\| = \|z\|/x^*(z)$, что доказывает оценку сверху, в то время как оценка снизу очевидна.

Доказательство теоремы. а) $\implies$ в). Пусть δ – константа АПС $\{x_n\}$. Зафиксируем любой вектор $x \in S(X)$. Пусть $x^* \in S(X)$ такой, что $x^*(x) = 1$. В силу утверждения 2, найдутся номер n и число $\theta \in \{-1, 1\}$ такие, что $\theta x^*(x_n) \geq \delta$. Применим лемму 2 для $z = x - \frac{\theta\tau}{3}x_n$ (где $\tau \in (0, 1)$ подберем позже). Имеем

$$\left\|x - \frac{\theta\tau}{3}x_n\right\| \leq (1 + 2\rho(\tau)) \cdot x^*\left(x - \frac{\theta\tau}{3}x_n\right) \leq (1 + 2\rho(\tau))\left(1 - \frac{\tau\delta}{3}\right).$$

Поскольку X равномерно гладко, можно выбрать $\tau \in (0, 1)$ так, чтобы

$$2\rho(\tau) < \frac{\tau\delta}{6}.$$

Тогда

$$(1 + 2\rho(\tau))\left(1 - \frac{\tau\delta}{3}\right) < 1 - \frac{\tau\delta}{6}.$$

Таким образом, множество $\{\pm \frac{\tau}{3}x_n\}_1^\infty$ является $(1 - \frac{\tau\delta}{6})$ -сетью $S(X)$.

в) $\implies$ б). Пусть множество $\{\pm tx_n\}_1^\infty$ является ε -сетью $S(X)$ с $\varepsilon < 1$. Зафиксируем произвольный $x \in B(X)$. Будем искать представление $x = \lim_k S_k$, где $S_k = \sum_{j=1}^k b_j x_{n_j}$, причем пока не будем требовать инъективности отображения $n \mapsto n_j$. Доказательство проведем индукцией по j .

Пусть $j = 1$. Найдутся номер n_1 и знак θ_1 такие, что

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \theta_1 t x_{n_1} \right\| \leq \varepsilon.$$

Положим $b_1 = \theta_1 t \|x\|$. Тогда $\|x - S_1\| \leq \varepsilon \|x\| \leq \varepsilon$.

Пусть $j = k > 1$. Найдутся номер n_k и знак θ_k такие, что

$$\left\| \frac{x - S_{k-1}}{\|x - S_{k-1}\|} - \theta_k t x_{n_k} \right\| \leq \varepsilon.$$

Положим $b_k = \theta_k t \|x - S_{k-1}\|$. Тогда $\|x - S_k\| \leq \varepsilon \cdot \varepsilon^{k-1} = \varepsilon^k$.

Таким образом, представление $x = \lim_k S_k$ найдено, и имеем

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} b_k x_{n_k},$$

$$\|b_k x_{n_k}\| = \|S_k - S_{k-1}\| \leq \|x - S_k\| + \|x - S_{k-1}\| \leq 2\varepsilon^{k-1}. \quad (8)$$

Осталось только сделать отображение $n \mapsto n_k$ инъективным. Для этого достаточно привести подобные члены в ряде (9) — ясно, что норма k -го члена не больше, чем $(1 - \varepsilon)^{-1} \cdot 2\varepsilon^{k-1}$. Теорема доказана.

Следствие. *Каждая АПС в суперрефлексивном пространстве является быстрой ПС.*

В заключение приведем пример, показывающий существенность условия суперрефлексивности. Рассмотрим пространство $X = (l_1^{(1)} \oplus l_1^{(2)} \oplus \dots)_{l_2}$, являющееся рефлексивным, но не суперрефлексивным. Все слагаемые $l_1^{(k)}$ будем рассматривать как подпространства в X , и через $e_n^{(k)}$, $n = 1, 2, \dots, k$, обозначим векторы канонического базиса в $l_1^{(k)}$. Определим следующее множество векторов:

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_{n(k)}^{(k)} \in X : \lambda_k \in \mathbb{R}, \quad 1 \leq n(k) \leq k, \quad k = 1, 2, \dots \right\}.$$

Докажем, что любое плотное в A счетное подмножество является АПС с константой 1, но не быстрой ПС.

Зафиксируем произвольный $x^* = (x_k^*)_1^\infty \in X^* = (l_\infty^{(1)} \oplus l_\infty^{(2)} \oplus \dots)_{l_2}$. Для доказательства первой части достаточно, в силу утверждения 2, найти $x \in A$, $\|x\| = 1$, такой, что $x^*(x) = \|x^*\|$. Найдутся номера $n(k)$, $k = 1, 2, \dots$ такие, что $|x_k^*(e_{n(k)})| = \|x_k^*\|_{l_\infty}$. Тогда, при подходящем выборе чисел λ_k , $\sum \lambda_k^* = 1$, для вектора $x = (\lambda_k e_{n(k)})_1^\infty \in S(X) \cap A$ верно следующее:

$$x^*(x) = \sum_k |\lambda_k| \cdot |x_k^*(e_{n(k)})| = \sum_k |\lambda_k| \cdot \|x_k^*\|_{l_\infty}$$

$$= \left(\sum_k |\lambda_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_k \|x_k^*\|_{l_\infty}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_k \|x_k^*\|_{l_\infty}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|x^*\|.$$

Предположим теперь, что некоторое плотное в A подмножество есть (C, q) -быстрая ПС. Проектируя X на компоненты $l_1^{(1)}, l_1^{(2)}, \dots$, получаем, что для каждого $k = 1, 2, \dots$ некоторое плотное подмножество в $\{\lambda e_n : \lambda \in \mathbb{R}, 1 \leq n \leq k\}$ является (C, q) -быстрой ПС в $l_1^{(k)}$ с константами C и q , не зависящими от k , что, очевидно, неверно.

Автор благодарен В.М. Кадецу за множество предложенных интересных задач и руководство работой.

Список литературы

- [1] *Ю.Ф. Коробейник*, Об одной двойственной задаче. 1. Общие результаты. Приложения к пространствам Фреше. — Мат. сб. (1975), т. 97, № 2, с. 193–229.
- [2] *С. Банах*, Курс функционального анализа. Радянська школа, Київ (1948).
- [3] *Ю.Ф. Коробейник*, Представляющие системы. — Успехи мат. наук (1981), т. 36, № 1, с. 73–126.
- [4] *И.С. Шрайфель*, Абсолютно представляющие системы в l_2 . — Изв. вузов. Северо-кавказский регион. Естеств. науки (1993), № 3–4, с. 68–77.
- [5] *J. Diestel*, Sequences and series in Banach spaces. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo (1984).
- [6] *В.Д. Мильман*, Геометрическая теория банаховых пространств. Теория базисных и минимальных систем. — Успехи мат. наук (1970), т. 25, № 3, с. 113–174.
- [7] *J. Lindenstrauss and L. Tzafriri*, Classical Banach spaces. I. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1977).
- [8] *I. Singer*, Bases in Banach spaces. II. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1981).
- [9] *В.И. Гуракий*, Счетно-линейно независимые последовательности в банаховых пространствах. — Успехи мат. наук (1981), т. 36, № 5, с. 171–172.
- [10] *P. Enflo*, Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm. — Israel J. Math. (1972), v. 13, No. 3–4, p. 281–288.

**On representative and absolutely representative systems
in Banach spaces**

R.V. Vershynin

The topological properties of representative systems (RS) and absolutely representative systems (ARS) are studied. An overfilled RS in the Hilbert space is constructed; as a consequence some "overfilled" possibilities of the bases are obtained. The ARS in super-reflexive spaces are described in terms of the speed of expansion convergence.

**Про репрезентуючі та абсолютно репрезентуючі
системи у банахових просторах**

Р.В. Вершинін

Вивчаються топологічні властивості репрезентуючих систем (РС) та абсолютно репрезентуючих систем (АРС). Побудовано переповнену РС у гільбертовому просторі; як наслідок отримано "переповнюючі" можливості базисів. Описано АРС у суперрефлексивних просторах у термінах швидкості збіжності розкладів.